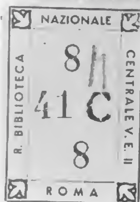
Santini Antonius




NAZIONALE
R. BIBLIOTECA
CENTRALE V. E. II
8
41 C
8
ROMA

EVCLIDES
RESTITVTVS

PROPOSITIONES GEOMETRICÆ

PER

ANTONIVM SANCTINIVM
LVCENSEM
CONGREGATIONIS SOMASCHÆ,
ROMÆ
IN ALMO ARCHIGYMNASIO PROFESSOREM

EVCLIDI RESTITVTÆ



MACERATÆ

Ex Typographia Philippi Camaccij. M. DC. LV.
Superiorum Permissu.



ILLVSTRISSIMO

FRANCISCO BONVISIO PATRITIO LVCENSI

ANTONIVS SANCTINIVS F.



Ethodus inueniendi in Geometricis, Illustrissime Vir, apud Authores vna sanè fuit, nempè resolutionis via, à Veteribus excogitata, à successoribus postea pluribus ditata exemplis; nullis tamen legibus obnoxia, at ab industria cultorum suscipiendis, ideò non eàdem felicitate ab omnibus exercetur.

Nostro postea æuo præclarus Author eam in artem transtulit, & magno sanè ingenio induta specie, præceptisq; munita securè exercere docuit, adeo quod nullius algorythmi effectio in eam quidpiam caliginis aspergeret, attamen inuenta fuit vtraque forma, minus idonea, vt duo problemata Geometriæ oportuna exhiberentur; Prisca quidem ob locum extraneis subsidijs iam concessum; Recens verò sibi plurimum adscripserat, in actu deindè se minorem reperit, postulando scilicet quod facultas oppugnat, ex quo manifestum fiet maiora in dies eidẽ

irrogari præiuditia, hæc itaque mihi aliquando meditanti, quì factum planè ignoro, meas ad aures susurri non nihil appulerat, inofficiosum nempè perpetuò futurum aliena recipere media, vbi tantùm germana elementa sint oportuna. Hoc dudùm (sub quadam vmbra) enunciari permisimus, vt præstantiora excitarem ingenia, at sumus experti, à suo singulari genio vnusquisque soleat suscipere impetum, non equidem soliciticiores defuerant, qui tàm illudēdi pruritu, quàm minus cautiores nequiuerant, ex modo saltem, vel minimum suspicionis concipere, an ponè tabellam quidquam lateret occultum! Nos autem qui Geometriæ sub vexillo supplementi Vietei, voluimus debere emendari defectus, nostro muneri relictum onus ad præstandum agnouimus, & quæ Postliminio detraximus, hìc exhibere fuit operæ pretiū, vbi nedum Vires insunt facultati ad ea duo constituenda problemata, at vlterius posse progredi indicamus, neque ab vllo credimus mortalium Geometrię præscribi posse limites, quin plura nobis ignota ad incrementum sint posteritati reseruata.

Opusculum igitur hoc, Illustrissime Vir, tibi nūcupandum censuimus non modò, vt grati saltem animi professione, ac tuæ erga me humanitatis officia testarer plurima, verùm etiam, vt eidem cederet in præsidium, etenim quam nequiuerat ex se assequi lucem, à tui nominis splendore omnem sibi non dubito obuenturam, & si quidem tam benignè illud in

com

complexum acceperis, quàm intelliges in obsequium tibi oblatum; ac simul à tuo non fuerit improbatum acumine, de aliorum porrò censura minus fas erit concipere metum. Indulto deindè gaudet mathesis, quod eius species haud à mole, sed aliundè sibi tribuatur, quod elementaris propositio valeat ad instaurandũ plura, aliàs ruitura ędificia: nihil enim est in humanos vsus, quod è suo mathesis non effundat ęrario. At ipsa domiciliũ sibi statuisse apud ingennos; paucis quippè, verè tamen edixerat Plato, (liberam scilicet esse mathesim ab actione, cognitionem tantum retinens) quod sanè fuerat dixisse. Celsitudo doctrinæ huius materiã non eleuat, at in contemplatione affectionum, libamine nimirum veritatis summopere oblectari animus, vbi verò ad artiũ necessitates respicit, vnicuique, quod sibi competit suam tradit normam; opera verò ab ea deflexa, vna cum artifice in vituperium reiicit, vbi deindè agnoscat materiam eleganti inbutam forma, in authorem artem commendat, quod est sibi iudicium de omnibus reseruare mathesis, idcirco studium magnatum, ac ingenuorum proprium. Cęterum quum Generosæ mentes molestè adeò sustinere cupiant, quam actu virtutis laudes promereri gestiant, fortasse celebris oratoris haud immemores moniti, nempè.

„ *Sapientes honestum illud (quod maximè natura sequitur) in factis positum, non in gloria iudicant; etenim* „ *qui errore imperitæ multitudinis pẽdet in magnis viris*

non

,, *non est habendus*. Hoc sanè consiliũ, quã sapienter fuerit acceptum pro vtraque Politia, in qua præclarissimi maiores tui se dicarunt, quum honestissimè monumentis historicis facinora eorum præclara ab omni prorsus obliuione sint vindicata, si hìc vellem paucis recensere, tùm loci ergo, tùm à meo rudi stilo, tùm maximè ab ipsa inhiberer rerum amplitudine, dubio namque procul, & præter intentum, foret quidpiam de eorum dignitate imminuere, vbi familię splendores vibratione sui àstri conspiciantur augeri fulgore, quæ vtique tua non esse nequeunt, Verum quia te nouimus optimis adornatum moribus, liberalibus deindè addictũ studijs, & præsertim oblectari historicis. Idcircò nemini mirum videri poterit, adeò celerior eam te adeptum peritiam rerum, quod inter aulas Principum (lydio nempè virorum) recenscaris ex numero paucorum maximè cõmendatum, pro inde mihi ea in animum subierat cogitatio, haud à te debere improbari illud Poetæ effatum Præstantibus animo directum.

Genus, & proauos, & quæ non fecimus ipsi, vix ea nostra sunt.

Ad instar scilicet pictoris egregii, exemplo se coram, haud inspecto, conceptæ intendens Ideæ, magisterio pennicilli pulcherrimã promere formã hoc quippè dudũ iam tuæ virtutũ prolusiones innuerant

erant

erant, nunc verò in atrio virilitatis constitutus, decidentium florum fragrans varietas, quam vberrima sit messium futura testatur, etenim, qui maturè nouerit gregis affectionum efficere sibi familiare regimen, vtique felicius prudentiæ accessum ille obtinebit ad columen, quod sanè est in astris illud dominari permissum sapienti, nec præstantius eo aliquid optandum in vita. Vale Dabam Romæ XIIX Kal. Octobr. 1654.

INGENVO LECTORI S.

PRO ratione opuſculi huius infra ſatis dictum reperies; itaque contentio ſectionis anguli, & mediarum inter extremas credimus finem recepiſſe ab ijs nempè, qui ab Euclideis demonſtratis non recedant.

Nunc verò neſcio quid ſe obijciatur obſcurius pro circuli dimẽſione, nos formam proponimus breuiorem animoſè quippè, non tamen aliquo ſine ſcrupulo. An verè ſi quadratario concedatur recta æqualis perimetro (pro qua tàm dirè ſe excruciat) ipſe cum ſemidiametro exhibere valeat iuſtam magnitudinem ſuperficiei concluſam perimetro! ratio dubitandi eſt, quod omnium Iſoperimetrorum circulus ſit capacior, quod olim Theon in Commentariis Ptolemęi oſtendit, ex eo deindè alij, oportet igitur quod manente ſub forma ſua circulari ea linea, neſcio quid amplius poſſit, quam ſi extendatur in rectitudinem: quare ſi quæſtio fiat de ſpatij ęqualitate comprehenſi ſub rectilineo triangulo, cum perimetro dato vni lateri ęquale, illud quod circularis à figura habuit, deleta figura neceſſe ſit remittat, quod ab ea fuerat: ſi verò concedatur ſpatiũ circulare ęquale conſimili triangulo rectangulo, manente ſemidiametro opus ſit reliquũ latus neſcio quid amplius in longitudine ſit, quã ipſa perimeter, pro qua re appellandum à Iudicio ſenſus, quia ab eo hæc effugiunt, ad tribunal rationis vbi ad diſpiciendam remittimus.

Præter quam quod euidens eſſe poteſt ſingularis circuli nobilitas non deberet pro dimenſione habere cum cæteris magnitudinibus eandem normam, quæ nituntur recta linea, & angulo determinatè recto, circulus autem ſolo circino hæret, & angulos exulare iubet.

D. HIERONYMVS GALLIANVS Præpositus Generalis Congregationis Somaschæ

Facultatem concedimus R. P. D. Antonio Sanctinio nostræ Congregationis Sacerdoti professo, quod typis committere possit opusculum Geometricum, cui titulum fecit, *Euclides restitutus*, quum in eo nihil habeatur, quod per Nos obstet; at in reliquis omnia seruentur, quæ de Iure seruanda sunt. In quorum fidem &c. Dat. Romæ in Collegio nostro S. Blasij montis Citorij vndecimo Kal Febr. 1654.

D. Hieronymus Gallianus Præpositus Generalis Congregationis Somaschæ.

Si placet Illustriss. & Reuerendiss. D. D. Papirio de Siluestris Episc. Maceratæ.
Imprimatur. Fr. Vincentius de Gulijs Min. Conu. Sac. Theol. Magister, in Patria vniuersitate Philosophiæ Professor.

Imprimatur.
Malatesta Gabutius I. V. D. Prothonotarius Apostolicus, & Illustrissimi, & Reuerendissimi D. D. Episcopi Maceratæ Vicarius Generalis & Auditor

Hieronymus spinuccius Sancti Saluatoris Canonicus, Philosophus, ac Sacræ Theologiæ Doctor, & Reuerendissimi Patris Inquisitoris Generalis Anconæ Reuisor vidit.

Imprimatur.
Frater Dominicus Maria de Ancechijs, Lector, ac Vicarius Sancti Officij Ordinis Prædicatorum Maceratæ.

Errata quæ nobis occurrerant sic Corrigenda

Pag.	Linea		Legendum
1	3. à fine	luſicoſos	luſcioſos
3	*vltima*	huuius	huius
7	13	edequare	adæquare
	poſtrema	ex his	& his
11	18	HBL	H *D* L
17	6	queritur	quæritur
18	3	P producatur	deletó P abundate ibidem
27	2 à fine	A C ad C D	H C ad C D
32	11	E H *D* B	I B E H
33	6	A B &	D G &
44	15	eodem G H	eadem H G
	18	per 2 decimi	per 2 duodecimi
	21	perimetrum	perimetrum circuli
46		In ſchemate	ſignum O intelligatur inter lineolas ductas 2 & 4, & 1, 3
47	13	deſtributa	diſtributa
63	10	perfrui	perfici
64	1	tempore	tenore
	14	erunt EGF, DGC	erunt anguli EGF, DGF

quæ nos effugiſſe inuenta humanitas lectoris suppleat



EVCLIDES RESTITVTVS.



Ausam quippè perspicuis rationibus munitam Propugnaturo, sibi, vel comitatu, vel copia rerum è regione plurimos castrametari prospiciens, attamen se in campo experiri gestiret, non equidem ei, citra iniuriam, licebit vllam inuri temeritatis notam. Eßet namque animi longè minus ingenuo, metu ex eo affici, & veritati non ambiguæ patrocinium subducere. Inter ea igitur quæ legibus vetita sint Philosophus V. moralium ait, ordinem non deserere: non fugere: arma non abijcere, & quidem nobis plurimos aduersari, ob ipsius assumpti qualitatem ignorare haud potuimus, & leuitatis nimium fuit conatus illudere nostros, veluti cantillantis Poetæ: aut petis, aut vrges rediturum Sisyphe saxum; *scilicet sibi suadentes, nos perpetuò facturos nihil, verum lusicosos huiusmodi haud morari oportet, non enim infinita propemodum dispicere queunt naturæ rerum nos latere, quorum pars non vtique minor;* Lusciosos

adeò iugata tempori dignoscitur, quod seorsim ab eo spes ea assequendi nulla fiat, quo circa satius foret Philosophãti inhærere rebus ipsis plurimum, inutilibusq; verbis deindè minimum, ideò longè proximior veritati fieret accessus, ac improbæ contentiones facillimè decoquerentur, quæ nullum in mathesi puriore locum inuenire queunt, quin propter alicuius affectus corruptelam intrudantur: etenim in peculiari illius obiecto, conceptu mentis abstractione formato, nihil variationis materiæ in tabella imaginationis, quo subsistunt dimensionum schemata admitti licet, & quæ fuere Euclidis postulata in eo plano prorsus absque materia concipi poßunt, reliqua verò quæ eiusmodi simplicitatem excludant instrumenta, releganda veniunt ad inferiores artes, & praxes ipsi materiæ adnexas.

Quum itaque veterum sapientiores inquisierint conficiendi duo illa problemata tàm facultati necessaria, & ad amußim non inuenissent methodos, tunc ad ea se contulerant, quæ vsui humano inseruire sufficerent, & eorum inuenta deinde omni posteritati trasmiserant, non ideò decernere potuerant contra vires facultatis quicquã, & quicumque in contrarium senserant aßerendo inutilem, ac otiosum laborem futurum si vltra quam reperissent maiores, proprios voluißent apponere conatus; istos planè nimis deflexisse à recta philosophandi ratione, successus temporum ostendit, nullus vtique inter saltem candidatos inficias ire potuerit, hactenus mathesim longo interuallo excessiße adolescentiam, & fortasse citra iniuriã,

compo-

componi posse eius status, ei qui fuerat tempore communiter nuncupato sapientum, cui sanè mirum non fiat nobile inuentum illud speciosę logistices primo allatum ingenio, ac labore Vietæ? nemini quidem! nihilo minus cogitans de supplemento Geometriæ, vt daret intelligi se recessisse à formulis antiquorum, intrudere non dubitauit principium omnimodè facultati aduersum, super quod inædificaret non pauca, vlterius plane ruitura, nisi aliunde inspexisset potuisse illis accedere fulcimen: poterat quippe Author iste præclarus hærere vni, vel alteri ex inuentis antiquorum methodo, cui obiectum nihil à posteris crederet: verùm eius perspicacitas, mihi visus sum, præuidisset, non difficulter suum postulatum posse reuocari ad sanam Geometrię doctrinam, quod non contigerat antiquorum vlli formulæ.

Deinde inter ingenia primi honoris relatum videmus alterum ex Gallijs, nempè Renatum des Cartes, insignem speciosę logistices propagatorem, & suarum inuentionum authorem præclarum (intra fines matheseos me consistere, & pro alijs disciplinis, qui conceptus recipiantur non attingam) documenta sanè eius commendãtes non modicum transcēdentia, attamen in hoc vno discedere ab eo cogimur, quod duorum problematum de trisectione anguli, ac de duabus medijs uelit fieri per conicas sectiones, quod effecerat Menechmi formula, & vt dicantur construi per Genus planorum, vno iugo copulari optat cum eo ab antiquioribus nuncupato solidum: quid vero authoritati consequutę huius insignis Viri, & fau-

torum clarissimorum sufficienter reponi valeat, non equidem aliundè recipimus, at ex eiusdem armario, nec omnimodè sum ratus de sententia alicuius aßeclæ peritissimi (scripserant namque authore superstite, cui obuiam ire integrum minimè fuisset obsequia prætendere) habentur itaque in primæua editione vernacula mihi pagina 383, deinde in latina seorsim algebrica pag. 88 sequentia

,, Nec minus vitium est constructionem eius postea per rectas lineas, & circulos tentare, quam ad constructionem illorum, in quibus non nisi circulis est opus, sectiones conicas adhibere: si quidem quicquid ignorantiam aliquam testatur peccatum dici mereatur. Hæc ille.

Non ne hæc phrasis congruit cum ea Vietæ, vbi dixerat ad Adrianum, Geometrica Geometricè tracto: Analytica analyticè, scilicet quæ sua natura sint gradu distincta, non oportere confundi.

Præterea vndequaque emergere antiquorum formularum propagines, potius quàm eorum vetus cohiberi possessio conspicimus. Nuper commentaria in Euclidem emisit Claudius Riccardus, quibus libellum quoddam paragogicum, aßutum, est de immissione duarum inter datas continuè proportionalium, in elencho quatuordecim comprehendere asserit vnam propriam accensendo formulam (moneo obiter excidisse postea illam Pappi ex veteribus) verum pro eius ingenuitate Author iste fatetur omnium insufficientiam, verbis istis.

,, Notandum porrò est methodos istas omnes, non

esse

„ esse ad amussim Geometricam, nam vel suppo-
„ nunt organa, vel attentationem; excepta illa Ar-
„ chitæ, quæ ex alio capite propter impenetrabili-
„ tatem ad praxim minimè reduci potest.

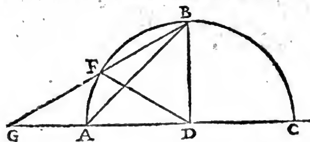
Quid porrò insinuare voluerit causę eius additi libelli, nempè vt traderet fundamentum, pro augendis, ac minuendis corporibus, quod Euclides fecerat pro planis figuris in sexto libro, comparatio non æquè incedit, concessa, & demonstrata, Euclidis sunt super quæ inædificat, non ita hactenus allata pro solidis, à Riccardo neq; hucusque ab alio, quatenus nobis videre contigit, & quidem nos eiusmodi incumbentiam suscepisse, ab annis aliquot liberè fatemur, nimirum quod eadem duo problemata fuissent construenda de trisectione æquali anguli, & duarum mediarum inter datas per simpliciter Euclidea, quasi Fecialis munere fungente, indicauit Constantius Laruatus, & sanè fuerant, qui improbarent, non equidem aliquis, cui applaudisset de re eiusmodi cogitatio, quo circa præter id quod non planè insufficienter pręstitimus in Postliminio Geometrico, nuper assumimus loca omnia in supplemento Vietæ restituenda per elementa Euclidea, vbi ab Authore in vsum acceptum reperimus postulatum, quare eliminanda erunt ea omnia à puriore Geometria discedentia, & libera ad nos reuerti licebit nemine inhibente præstita fides.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA

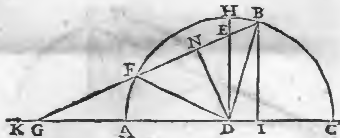
Dato ſemicirculo, in eius peripheria puncto, oporteat ex eo lineam inclinare, cuius pars inter curuam, & rectam diametri eductam cōprehenſa ſit ſemidiametro æqualis.

SIT ABC ſemicirculus, pūctum primò datum in vertice B; Oporteat ab eo deducere lineam, vt BG taliter, quod pars eius FG inter peripheriam, & eductā diametrum, ipſi æquetur ſemidiametro AD. Demiſſa perpendicularis BD cadet quidem in centrum: iungatur linea AB, cuius ſemiſſis AG indirectum ponatur ipſi diametro. Dico lineam BG ductam efficere quæſitum, hoc eſt eius partem FG comprehenſam peripheria, & diametro educta, fieri æqualem AD ſemidiametro. Quoniam enim AD quadratum dimidium eſt AB quadrati, ob æquales AD, BD, & 47 primi, & GA ſemiſſis quadrati AD; compoſita ergo tota DG, eius quadratum poterit triplum quadrati AD; at DG, BD quadrata ſunt quadruplum quadrati AD, id eſt quadratum BG æquale AC quadrato, ergo lineæ per 22. ſexti, & ſecantur ſimiliter



liter in D, & F scilicet bifariam, nam BG secta in F potest per 4 secundi quadrata ęqualia AD quatuor, & quidem ex casu hoc facillimo monemur adplicato diametro nempe ex B in G posse ad alios progredi.

Sit igitur punctum B datum secundò vltra verticem dimidij circuli in H, ad illud construendum. Demittantur perpendiculares HD, BI, & diametro adijciatur AK ipsi semidiametro æqualis AD, & à quadrato deinde compositæ CK auferatur quadratum ex BI, linea verò, quæ differentiam illorum sit potens, ponatur ex C in CG. Dico ductam BG eam esse lineam quæsitum efficientem, hoc est partem eius inter peripheriam, & diametrum eductam, vt FG adæquare semidiametrum AD. Iungantur DF, DB, & perpendicularis DN super BF demittatur, quæ erit illam bisecans. Quoniam igitur à puncto G extra ductæ



sunt in circulo lineæ illum secantes GB, GC per 36 tertij BGF, CGA duo rectangula æqualia fiunt, quibus addendo DF, DA quadrata æqualia, erunt BGF rectangulum, & quadratum DF æqualia rectangulo CGA ✠ DA quadrato, hoc est per 6 secundi DG quadrato: at BGF rectangulum per 3 secundi est rectangulum BFG ✠ FG quadrato, ex his accedens

dens DF quadratū, ſunt ęqualia quadrato eidem DG; cumque BFG ſit factum GF in FB duplam FN, erit reſolutio iſta, eadem per 12 ſecundi in triangulo DFG, quadratum DG æquale quadratis GF, DF plus rectangulo GFN duplo.

Deinde in alio triangulo EDF eſt perpendicularis DN in latus EF, quare per 13 ſecundi, quadrata DF, FE ſimul æquantur rectangulo bis ſub FE in FN, & per primam ſecundi, & quod ſub BF in FE, ſeu per 3 eiusdem rectangulo ſub FEB ✠ FE quadrato, cui addito DE quadrato, erunt ſimul duo quadrata DF, FE æqualia quadrato DE ✠ quadrato FE, plus rectangulo FEB, & ſubducto æquali ſub eadem figura FE erunt æqualia DF q, & DE q ✠ FEB rectangulo, & in prima reſolutione DG q erāt æqualia GF q ✠ DF q ✠ GFB, hoc eſt BF in FE; ergo duo hæc rectangula GFB, BFE, æqualia habent eandem baſim BF, & per primam ſexti ſequitur FE, & FB ſint æqualia, quod etiam aliter euidens, quia FEB rectangulum, plus DE q ſunt ſimul æqualia DH quadrato, etenim per 35 tertij FEB rectangulum æquale ſit ei, quod ſub HE in totam EDH conficitur, cui appoſito DE quadrato

per

per 5 secundi est ipsum D H quadratum; quare à rectangulo sub G F B auferatur F E B rectangulum, relinquetur factum G F E rectangulum æquale quadrato D H: ergo tota G E est dupla G F, & quadratum D H quadrato æquatur ex F E, seu G F: ergo diametro A C æqualis est G E linea secta in F, & pertinens ad B, factum ergo erit quæsitum.

Sed manente eadem figuratione alia via fortasse faciliore idem demonstrare aggrediamur.

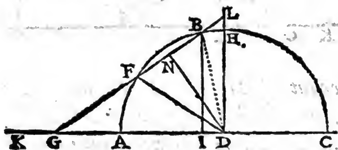
In triangulo B D F Isoscele anguli D F B, D B F sunt æquales per 5 primi, reliquus verò angulus à perpendiculari D N bisecatur, at per 8 sexti triangula E D G, N D G, & E D N sunt æquiangula, & anguli D E G, G D N pares, nec non E D N, N G D. Ideò erit angulus D E F compositus ex semisse anguli B D F plus angulo F D G, hoc est ex F D N † F D G, sed ex F D N † E D N (dicas E G D) est angulus F D E; quare æquales F D E, & F E D: ergo per 6 primi sunt latera F E, F D æqualia, & quia tàm angulus D E G differt ab angulo recto per E D N, quàm per F D G manifestum est angulos E D N, & F D G esse æquales inter se, & uni tertio, scilicet angulo F G D (dicas E G D) ergo per axioma primum æquales sunt anguli F D G, F G D supra basim

in triangulo F D G, & per eandem 6 primi latera sunt æqualia; triangulum itaque E D G rectangulum ad G D E dirimitur per D F in duo Isoscelia F D E, F D G, & ad vnum punctum F in peripheria circuli A F C coeuntia latera G F, F D, F E per propositionem 9 tertij circulus per tria G, D, E transiret, & diameter fieret G E, bisecta in F; quare æquales GF, A D; & iterum factum erit quod propositio quæsierat.

Demum cadat B punctum citra verticem H, oportet illud idem efficere. Demittantur perpendiculares B I, H D in A C, & producatur D H indefinita, deindè sit A K æqualis semidiametro A D indirectum eidem, & à quadrato composita C K auferatur quadratum cõpositum ex mediæ proportionalis inter C I, & I K quadrato, & quadrato D I, linea verò quæ sit potens, reliqui, ponatur in C G, & ex G per B continuata secabit, & circulum infra B, vt in F, & lineam D H eductam supra B, vt in L. Dico G L fieri æqualem diametro A C, & in F bifariam secari; secat namque B G in F, quia angulus D B G est minor recto. Et quoniam ex L puncto extra ductæ sunt in circulum duæ rectæ lineæ L F, L D H illum secantes per 36 tertij, rectangulum F L B æquale sit ei, quod continetur sub

L H in

LH in totam HDL, quibus accedant æqualia DF, DH quadrata; erunt DF q & FLB rectangulum æqualia DH q † rectangulo sub LH in HDL, & per 6 secundi simul quadrato DL. Deinde in triangulo DFG per 12 secundi æqualitas est inter DG quadratum, & suas resolutas partes nempè FG q † FD q ✠ rectangulo GFB (dupla enim FB, est FN) Cū autem in alio triangulo DFL per 13 secundi duo quadrata DF, FL simul excedant, quadratum DL lateris tertij per LFB rectangulum (hoc est per duplum LFN) erunt DL q ✠ LFB æqualia DF q ✠ FL q, superatque DL q ipsum DF, seu DH quadratum per HL in HBL rectangulum, dicas per æquale BLF, quod si BLF accedat ipsi LFB (seu GFB) conficietur FL quadratum, hoc est fient DF, DH, FL quadrata inter se æqualia, & quartum erit GF; nam DG quadrato si accedat FLB rectangulum, siue HL in HDL, ipsi DH quadrato ex vtraque parte erunt DG, DL simul quadrata æqualia quatuor DG, FL, DF, DH quadratis, siue per 47 primi, seu 4 secundi duo indirectum GL quadratum constituent, eius latus æquale ipsi diametro circuli, & in F cum peripheria secatur bifariam, quare constat propositum.



Et illud idem cum ſecunda forma concludetur, nam anguli D L G, N D G æquales ſunt; nec non L D N, D G N per 8 ſexti, at N D G conſtat ex F D G, & N D F ſemiſſe anguli B D F, ex quibus conſtat etiam D L G; ſeu L D F; anguli enĩ L D N, & F G D ſunt æquales, quibus communi addito F D N, æquales erunt F D L, N D G, hoc eſt F L D, F D L: ergo per 6 primi, & latera F D, L F æqualia, at angulus D L G, tàm aſſumens angulum F G D, quàm F D G complet rectum, quare æquales eſſe inter ſe angulos F G D, F D G, & latera æqualia per citatum elementum; at fuerant æquales lineæ F D, F L: ergo tres ſunt æquales G F, F L, D F, & quælibet ſemidiametro A D: ergo G L conſtans ex duabus indirectum ſemidiametros poterit quatuor, & bifariam ſe ſecat cum peripheria circuli: ergo factum quod, &c.

SCHO-

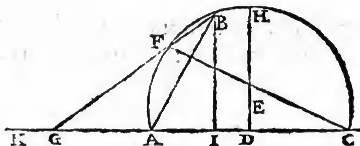
SCHOLIVM

SI darentur portiones supra, aut infra semicirculum, sit primum A B C semicirculo maior, punctum B in vertice, linea interponenda A B, ponatur B D (perpendicularis facta) æqualis A G, deinde iungatur B G.

Secundò in eadem portione punctum B sit vltra verticem H, linea etiam A B interponenda, accipiatur media inter A B, & H D pariter perpendicularis super cordam, sit ipsa A G, & iungatur B G.

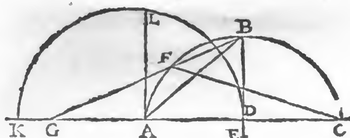
Tertiò

Tertiò demum in eadem portione B punctum cadat citra verticem H, tunc à quadrato cordæ A



C, dematur quadratum BC (concipe ductam) linea vero potens differentiam sit AG, & ducatur BG.

Deindè si daretur portio cedens semicirculo, & punctum primò caderet in vertice B, linea adplicanda sit A B, demittatur perpendicularis B D, producta ad vsque E centrum circuli: postea posi-



ta AK æquali A B, sumatur A L media inter K A, & A D, sitque A L + B D composita, & à puncto vltra D, vbi caderet ex A semidiameter A E, extendatur ipsa composita, quæ caderet in G, ex hoc puncto iungenda est B G.

Secun-

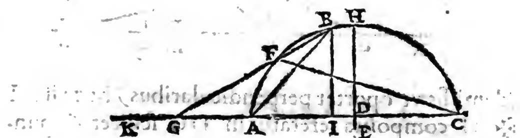
Secundò B punctum in eadem portione cadat vltra verticem H; linea inserenda sit AB, quæ referatur in AK, & media inter AK, & AI (demissis vt oportet perpendicularibus) hoc est AL + BI composita referatur in DG scilicet (à puncto vltra D, vt supra inuento) & iungatur BG.

Tertiò demum B punctum cadat citra verticem H, linea data AB eodem modo relata in AK, & media AL inter KA, & AI inuenta per 13 sexti componetur cum BI, adeò quod tota AL + BI posita in DG cum eadem cautela, à puncto vltra D, dabitur DG, & iuncta BG in omnibus sit factum quæsitum.

Et quidem sub vna forma omnes casus conclu-

demus

denius, iungatur CF, & quoniam per 21 tertij, & 13 primi super arcum CB sunt anguli CFB, CAB æquales, & reliqui CFG, BAG æquales, triangula CFG, BAG sunt æquiangula, quia G communis, & reliqui ad B, & C duplici elemento sunt pares, quare per 4 sexti latera sunt homolo-



ga, CG ad GB, ita BA ad AG, sed vt CG ad GB per 36 tertij, ita FG ad GA, quare per 11 quinti eadem fiat ratio BA ad AG, quæ FG ad AG, & per 9, seu 14 eiusdem erit BA æqualis FG: quare à puncto in peripheria adplicata erit linea æqualis præfinitæ inter curuam, & rectam, quod fuerat imperatum.

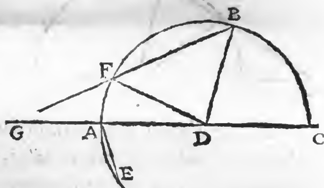
Et hinc ad alios casus posset progredi; Nos verò modo supersedemus breuitati studentes.

PRO-

PROPOSITIO SECVNDA

Datum angulum planum tripartito, & æqualiter secare.

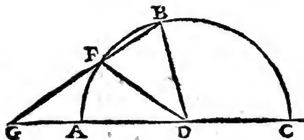
SIT angulus primò minor recto B D C, cuius trientem queritur, idemque est quærere anguli, quod de trisectione subtẽsi arcus. Ad amplitudinem liberam ex centro D perficiatur semicirculus A B C, deinde per primum Problema ex B puncto vltra verticem semicirculi, inter conuexum, & eductam diametrum ponatur F G linea semidiametro æqualis, quæ pertineat ad datum B; Dico sectum esse angulum B D C trifariam, eiusque trientem eße A F. Iuncta namque D F, erunt triangula G F D, F D B, isoscelia ex constructione, quare externis angulorum D F B, D B F duplus sit angulorum vtriusque F G D, F D G per 32. primi [illegible] eiusdem: ergo in triangulo B D G externus angulus B D C potest duos internos hoc est D G B simplum & D B G eius duplum: tres ergo continet angulos F G D, seu F D G, aut arcus oppositus A F sit tertia [illegible] B C arcus, quod erat propositum fieri.



C   Reliquus

Reliquus vero angulus A D B, seu arcus A B maior, ita licebit dependenter à minore trisecare. Pproducatur peripheria supra semicirculum, ita quod F E sit sextans circuli, hoc est tertia pars semicirculi, amplitudine nimirum semidiametri, erit statim arcus A E tertia pars dati A B; etenim, vt totus sextans F E se habet ad totum semicirculum ex 15 quarti scilicet vnum ad tria, ita ablata pars A F ad ablatam B C, & per 19 quinti, sic reliqua A E ad reliquam A B.

Si verò independenter tertiam partem inquiras B C, scripto vt supra semicirculo, à puncto B citrà verticem per primam huius duces lineam B F G, cuius pars intercepta curua, & recta æqualis sit semidiametro, factum erit, vt supra, quæsitum, A F nempè ipsius B C triens, seu angulus A D F anguli B D C.

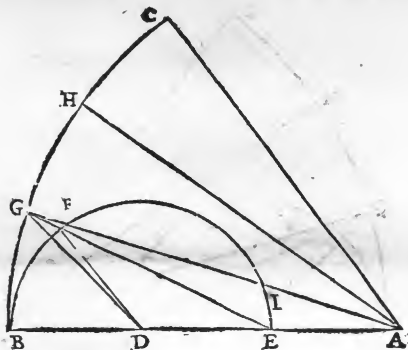


De angulo, aut arcu secando similiter opus est geometricum non tantum in tres æquales, verum in pluribus, & quidem sub vna generaliter methodo.

Esto arcus B C cuius circuli centrum sit A primum trifariã secandus, iungantur semidiametri A B, A C (& erit angulus B A C) diuidatur altera, vt A B in data ratione per 9 sexti cuius pars vna sit B D, ad eam scribatur distantiam semicirculus (immò, & amplius

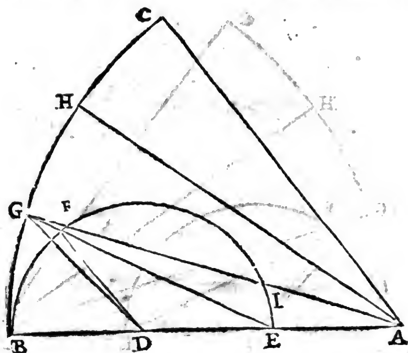
plius

plius pro oportunitate) & sit angulo BAC æqualis angulus BDF, hoc est DF æquidistet ipsi AC, deindè iuncta EF prorogetur in G, ad arcum datum. Dico eius partem BG fieri trientem BC (& in aliȷs portionem quæsitam) Iungantur AG. DG. Quoniam in triangulo isoscele DEF anguli ad E, & F supra basim sunt æquales, & per 5 & 32 primi re-



soluuntur; E, in angulos EGA, EAG, & F in alios FGD, FDG: ergo summa vnius æquatur summæ alterius, hoc est reciprocè accepti, erunt in æquam differentiam, nimirum angulus EAG superatur ab angulo FGD per eandem, qua superatur angulus FDG ab angulo EGA differentiam, hoc est vicissim: ergo duo anguli FGD, FDG si transeant in angulos

E A G , E G A , nihil deperit de quantitate anguli D E F , seu D F E , quare duo arcus B F , & B G propter eundem angulum ad E , quem subtendunt similes fiunt , nempè respectu suorum circulorum æquales portiones erunt . Sumantur in circulo, cuius D centrum (quot sunt oportunæ) hic bis B F in B I portiones , vt triplus B I sit arcus B F , & quoniam ob æquidistantes D F ,



& A C , ea est ratio semidiametri A B ad semidiametrum B D , ita arcus B C ad arcum B F in circulis diuersis propter æquales subtensos angulos B A C , B D F sit triplus arcus B C ad arcum B I , & per 9 quinti B C , & B I fiunt æquales arcus , at quia erant similes arcus B G , B F , argumentum per 19 quinti conducit , quod similes reliqui sint arcus G C , F I ,

F I; ergo bisecto arcu G C in H, & ducta A H, tàm arcus B C, quàm angulus trisectus habetur B A C, quod oportuit fieri.

Addimus in exemplum quintuplam sectionem, & hac forma nullam excludit aliam, etiam pro partibus numero paribus, [illegible] si inutiliter quum per continuam bisectionem vulgo efficiatur, neque in ratione super partiente erit difficile modica cautela aptare.

SCO-

SCHOLIVM PRIMVM

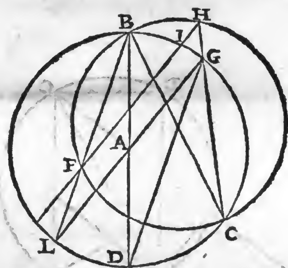
QVare eiuſmodi Problema de anguli triſectione ab antiquis tàm exagitatum, á non nullis iterum reuolutum, pendebat omnino ab ea inuentione ponendi ſemidiametrum interceptum curuo peripheriæ, & diametro educta; hoc voluerat effici per poſtulatum Vieta, prorſus retrahendum ſub ditione Euclidis, vt omnium antiquorum, & conſectantium aliorum methodi eliminentur, cæterum noſtrum non eſt cogere, ſequantur qui velint, eas quæ ſibi libuerint, ſat Philoſopho coactionis erit demonſtratio, Geometrica.

SCHOLIVM SECVNDVM

IN appendice inclinationum, vbi non adeò tot fuerit palea, quot liuor cuiusdam immodicè adfecti adeſſe voluerat, methodum non tantum triſecandi tradidimus, verum ſecandi in quacumque ratione ſicuti circulo inſcribendi figuras imparium laterum, quæ duo Problemata minime erunt negligenda, lubet hìc de anguli ſectione in quinque æqua les partes fieri repetitio, & quia ad omnem aliam ſectionem aſſimilando, transferri licebit, & quia de hac quinta ſectione Vieta opus habuit in conſtructione Geomerrica Problematis Adriani.

In

In circulo igitur BGD per conuersam 9 propositionem libri 13 sit latus decagoni BG, hoc est arcus quintæ partis semicirculi, & secandus arcus datus BC quintufariam; agatur corda BC, quæ transeat in diametrum alterius circuli BHCF, cuius quadrans sit BF, à puncto deindè C per datum G ducta linea CGH in secundo circulo dabitur H, & iungendo HF lineam, ipsa rursus secabit nouo puncto in I peripheriam primi. Dico arcum BI esse partem quintam dati BC. Ducatur BFL, & etiam GL. Quoniam igitur anguli C, D, L omnes vni portioni BG maioris circuli insistunt, æquales sunt per 21 tertij, nec non qui ad C, & F anguli insistentes minores in portione BH, quare æquales omnes euadunt, & quia æquales anguli in diuersis circulis arguunt similitudinē arcuum per 10 diffinit. libri 3 ergo similes fiunt arcus BH, BI, & consequēter similes sunt BG, BH, BI arcus: quare quæ pars fuit BG maioris, eadem facta est BH minoris circuli, & eadem BH, quæ in portione data BC fiet BI; sed tam BG, BH sunt semicirculi



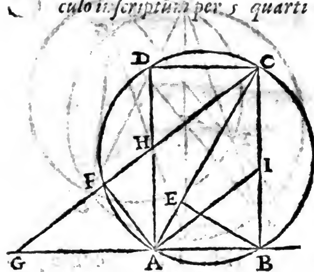
circuli

proprij vtraque pars quinta, & eadem erit BI portionis datæ pars quinta, nam si ducerentur cordæ BG, BH, BI componerentur triangula prorsus similia per 31 tertij.

PROPOSITIO TERTIA

Inscriptum circulo sit triangulum rectangulum, & ab extremo puncto diametri, seu hypotenusæ oporteat lineam ducere occurrentem basi eductæ, cuius pars inter eam, & curuam circuli æquetur basi.

SIT triangulum ABC rectangulum ad B, circulo inscriptum per 5 quarti, basis sit AB latus minus, & à puncto C opus sit ducere lineam, cuius pars FG terminata per eductam AB ipsi basi fiat æqualis. Agatur BE (perpendicularis ipsi) AC, [illegible] IA ordine inueniatur tertia proportionalis AI per 11 sexti, deinde inducta AI, ei æqualis fiat AG, & iungatur CG. Dico [illegible]



hoc

hoc eſt AB, FG æquales, etenim ducta AF rectus erit angulus AFC in ſemicirculo (& rectum ſtatim oſtendemus eſſe angulum FAI) ergo triangula AGF, AIB ſimilia, & per 4 ſexti, vt æquales fuere AG, AI, pariter FG, & AB: aßumptum verò ſcilicet quod FAI angulus ſit rectus ita fiet manifeſtum, quoniam ex 22 tertij in quadrilatero ABCF circulo inſcripto anguli BCF, BAF ſunt duobus rectis ſimul æquales, & BCF, & FAG ſimiliter euadunt æquales, cum vterque cum comite BAF ſunt duo recti, & per 21 tertij ſunt DCF, DAF, & per 8 ſexti FHA, FAG ſunt etiam æquales: at FAG, & FAH ſunt vnus rectus, & idem erit aſſumendo HAI, ſeù FAG, ſeu FHA, cum HAF efficitur rectus; ergo FAI rectus, & AI æquidiſtans ipſi CG, quare optimè ſequitur ſimilitudo inter triangula FAG, BIA, & æqualitas prorſus.

Si deinde vt in ſequenti figura trianguli rectanguli ABC ſit loco baſis maius latus, vt illud idem efficiatur ducta perpendicularis BE, & alia ex E in ipſam AB, ſit EH, deinde pars reſecta baſis BH, refera-

tur in BI, & coniuncta AI in eductam BA assumatur AG aequalis. Dico similiter iungẽdo CG, partem

eius FG esse aequalem basi AB: etenim similia fient triangula ABI, AFG, & per eandem, vt supra formã ratiocinando concludetur intentũ, vbi repetitio fieret ociosa.

Postremò si placeat interponere lineam hypotenusae aequalem secetur latus minus AB in E bifariam, ex

quo puncto ponenda erit linea indirectum, vt EG, quae

quæ possit omnium laterum, hoc est summam quadratorum AC, BC, AB simul. Dico lineam ductam CG efficere quæsitum, hoc est FG æqualem fieri AC hypotenosæ. Acta BF, erunt triangula CAG, BFG similia, vt supra fuit in consimilibus figuris ostensum, & argumentando consequenter concludetur eadem ratio FG ad AG, quæ AC ad AG. Igitur æquales FG, & AC.

Et ne aliquis casus videatur omissus, si triangulum rectangulum detur Isosceles, quadratum erit circulo inscriptum, tunc vnum sufficiet laterum secare bifariam, vt BC in I, & iuncta AI eidem æqualis, vt in ceteris facta AG, erit similiter FG æqualis lateri, seu basi AB, quoniam in quadrato, producto latere BA triangulum est BGC, eius latera per 2 sexti secta similiter; ideò GH ad HC, vt GA ad AB, seu AI ad AB, sunt etiam ob angulos æquales similia AGH, HCD, & erit AC ad CD, ita GH ad GA, siue GA aut AI ad AB, fiet igitur cõuertendo CD

ad H C, ita A B ad A I, & per 14 quinti A I, HC æquales; immo vt A I ad A B, ita G A ad G F; ergo ipsa A B æqualis posita est in F G intercepta, quod cõcludere adhuc poterat forma argumentandi superius inducta: quare per omnia Symptomata problema fit solubile ex Euclide.

SCHOLIVM

Hinc ex præmissa propositione fit manifestum reuocari ad Euclideam Scholam illius supplementi Vietæ propositionem septimam ab eo tamen alia intentione inducta, sed in eodem recidit, æque enim constructio nostra postulatum excludit, & propositum construit, at non erit abs re illam huc transferre, ait itaque.

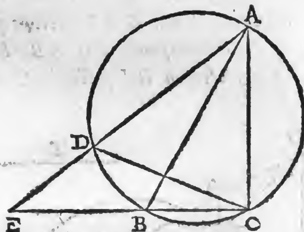
„ *Ex data trium proportionalium prima, & ea cuius*
„ *quadratum æquale sit ei, quo differt quadratum com-*
„ *positæ ex secunda, & tertia à quadrato cõpositæ ex se-*
„ *cũda, & prima inuenire secũdã & tertiã proportionales.*

fiunt ex data prima A B, secunda G A, tertia vero G H ex datis scilicet B C, cuius qundratum est differentia inter quadratum C G compositæ ex secuuda G A, & tertia G H, & quadratum B G compositæ ex A B prima, & A G secunda.

Prætere aliud integratur Problema in 8 Variorum cap. V. in quo Author proposuerat in singulari casu inter duas datas in ratione dupla ponere duas continuè proportionales, nempè sit A B dupla B C, &

sint

ſint inueniendę duę medię continuę proportionales cõpleatur A B C triangulum, & circumſcripto circulo, ex A continuetur linea, quæ in eductam C B baſim occurrens, relinquat interceptam D E æqualem ipſi B C, quod proximè ſupra demonſtratum fuit opus, ſi deindè agatur C D demonſtrat poſtea Author proportionales continuè eſſe A B, C D, B E, B C, ſeu D E.



PROPOSITIO QVARTA

Inter duas datas rectas lineas angulum facientes, à dato puncto extra ducere lineam, quæ hic partem ſubtendens angulo ſit æqualis præfinitæ.

H*Vius propoſitionis tres ſunt caſus iuxta anguli ſpeciem. ſint primum A B, B C datæ lineæ inclinatæ ſub angulo A B C recto, punctum extra datum D, & linea præfinita Z, quæ oporteat inter illas aptare, pertinens ad punctum idem datum. Demittatur in eductam C B, perpendicularis ex D puncto, ſit D E, deinde ipſa Z ponatur bis in B C, & iungatur D C,*

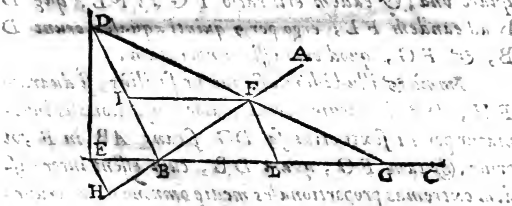
ſeca-

secabitur B A; sit in A puncto, postea secta AC bifariam in K, fiet ipsa K I parallela siue B A, siue D E, ab eodem K puncto eleuetur K G insistens ad angulos rectos super AC. Dico G punctum illud esse (ad quod si inclinetur linea D G) efficiens quæsitum, nempè portionem F G inclusam rectis A B, B C esse æqualem præfinitæ Z: etenim B I secta in G per 4 secundi, quadratum B I æquatur B G, G I quadratis ✠ B G in G I bis: ponatur B G æqualis I H, & G I ipsi B N, erit igitur B G quadratũ vna cum rectangulo sub N B in B G ✠ I H, plus G I quadrato, hoc est per primam secundi rectangulum sub N B in totam B H vna cum quadrato B G, æqualia quadrato B I: at centro facto in G ad interuallum F G semicirculus descriptus, linea F B perpendicularis potest rectangulum sub N B in B H, quibus si accedat commune B G quadratum conficitur ipsum B I quadratum, & illic F G quadratum; ergo per 22 sexti lineæ B I, & F G æquales, hoc est ex constructione B I æqualis Z; ergo & F G: centro igitur G circulus ad interuallum G N transibit per commune punctum rectarum A B, D G se secantium

centium, & quum sit vnica linea, pertinet F G *ad punctum datum.*

Sed post K I *ductam perpendicularem in* B C, *si duarum extremarum* B A (*terminata per connexam* D C) *& ipsam* K I *inueniatur media* B F *proportionalis, erit punctum per quod* D G *transire oporteat ad efficiendum problema, fiet namque* F B *quadratum, rectangulo sub* N B *in* B H *æquale, vt simul cũ* B G *quadrato conponant tum* F G, *tum* B I *æqualia quadrata.*

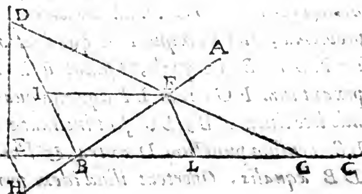
Secundo loco lineæ A B, B C *sint inclinatæ ad angulum* A B C *acutum punctum.* D *extra, & linea præfinita sit* D B *æqualis. Oporteat illud idem problema costruere. Demittatur* D E *perpendicularis in excurrentem* C B, *& abs puncto* E *concursus ordinetur* E H *parallela ipsi* D B *occurrens terminari ab ipsa* A B



prorogata in H, *deindè fiat, vt* E H *ad* H B, *ita* E B *ad quartam per 12 sexti, erit* B L, *& ab ipso acquisito* L *puncto agatur* L F *pariter æquidistans ipsi* D B, *secabitur* A B *in* F; *quo puncto efficietur quæsitum*

tum

tum; nimirum ducta D F *in directum*. *Dico interceptam eius portionem* F G *æqualem fieri ipsi* D B: *agatur si lubet* F I *parallela* L B, *& æqualis erit eidem per* 33 *primi; erit namque* D G *ad* G F, *ita* D B *ad*



B I(*per* 2 *sexti*) *seu ad* F L, *& permutatim per* 16 *quinti* D G *ad* D B; *vt* G F *ad* F L(*seu* B I), *quare vna, & eadem erit ratio* F G *ad* F L, *quę* D B *ad eandem* F L; *ergo per* 9 *quinti æquales erunt* D B, *&* F G, *quod erat effici imperatum*.

Immò & illud idem aßequetur faciliùs, si duarum E H, D B *linearum tertia maior proportionalis inueniatur per* 11 *sexti, erit ipsa* D G *secans* A B *in* F, *vt prius, & tam* F G, *quam* D B, *cum essent inter easdem extremas proportionales medię omnino pares erunt*.

Tertiò loco inclinatę sint A B, B C *lineę ad angulum* A B C *obtusum, punctum* D *datum extra, interponenda vero linea* Z *ad efficiendum problema; agatur* D E *perpendicularis super* C B *continuatam, & ipsa* E D *eleuetur ad concursum cum* B A, *nam ex* 17

primi

primi est necessarius occursus: deindè ponatur BI æqualis Z præfinitæ, & IK parallela AB, conueniens in K altera parallela BI: erunt parallelogramma ABIK (ducta KG similiter parallela AE) & AEGK æqualia sub eadem AK base per 35 primi: Iungatur deindè DG. Dico secari AB, & partem eius resectam FG inter lineas obtusum facientes angulum, æqualem fieri præfinitæ Z. Etenim ex duobus parallelogramis AEGK, ABIK æqualibus cōmune dematur ABGK trapezium, relīquūtur triāgula similia, & æqualia ABE, KGI, vt patet ex angulis: ergo EB, GI sūt æquales, & addita cōmuni BG, euidens est GE æquari BI, & cōtinuata IH æquali BG, erunt GE, BI, GH æquales; quare EH dupla ipsius Z: facto ergo G cētro ad interuallū BI seu Z circulus trāsibit per punctū lineæ DG, vbi secabit dimidia EH, quod erit FG: tres igitur FG, EG, GH sunt ad circuli centrū G, quia æquales erant per 9 tertij, & peripheria per extrema illarū pūcta trāsire oportet: quare FG efficitur equalis Z. At fotrtaße breuius ostōderetur FG æqualis Z, si vt in primo casu ex F caderet perpēdicularis ut FL, argmētando per 4 secūdi.

SCHOLIVM PRIMVM

IN eodem ſupplemento ſunt propoſ. XIX, quę purificantur per primam huius, adplicando ſcilicet, ex puncto in peripheria ſemidiametrum interceptá circulari, & diametro educta, ex ipſa XIX ritè integrata, conſtruitur XX eiuſdem ſupplementi pro exhibendo Iſoſcele conditionato, ad effectum conſtruēdi heptagoni regularis, quod poſtea in problemate vltimo propoſitione XXIV exhibet; hoc autem problema à nobis facilius geometricè, & vniuerſalius pro omni polygono imparium tradidimus in citata Inclinationum Appendice; claudit demum opuſculum ſuum clariſſimus author hiſce paucis.

„ *Atqua adeò duobus problematis, ęquationes cuborum*
„ *omnes, & quadrato quadratorum cuiuscumqua ad-*
„ *fectionis alioquin non ſolubiles explicabūtur. Vna*
„ *inuentione duarum mediarum, inter datas. Altera*
„ *anguli dati in tres partes ęquales ſectione, quod ani-*
„ *maduertiſſe fuit operæ prætium.*

Et illa duo problemata modò reſoluuntur, & conſtruuntur per ſimplicia Euclidis elementa, idcirco ocioſum, ac ineptum erit de cętero imbecilla accerſere ſubſidia, liberū eſſe oportet cuique iuxta ſemen excolere proprium agrum, noſtro interim oneri videbimur minime defuiſſe, cum iam indicari voluimus per ſupplemētū Vietæum Geometriā acquiſiuiſſe

uiſſe faſtigium ad eiuſmodi cogitationem vtique deduxerant verba non nulla eiuſdem authoris, & præſertim cap. 8 in reſponſo ad problema Adriani Romani, nimirum.

„ *Quare quærenti Adriano, licet ſiue in Geometricis, ſiue*
„ *in arithmeticis ſatisfacere: Adſcito nempè eo quod ad*
„ *ſupplementum Geometriæ inducēdū fuit poſtulato &c.*

Quomodo nanque verum fuiſſet aſſertum illud, & non ſolutioni obiciendum, ſi quiſpiam (quod omnes faciunt) haud eius principium admiſiſſet? poterat quippe author ad aliquam confugere antiquorum formam vtcunque iam à nemine non receptam (at vt ego interprætor) vt nobis indicaret ſe minime approbaſſe veterū inuenta ad duo illa conficiēda problemata, quia emendationi minus, & suum omnino idoneum proſpexerat, ac diſpoſitum poſtulatum, vt autem aduerſum alios ſe tueretur, tunc vſus fuit exemplo magni ſenis illius Siculi, qui induxerat helicis contactum theoreticum, vt haberet circularem ęqualem linæ rectæ ad quadrandum ſpacium rotundo comprehenſum; at res adhuc inuoluta, & problema deſideratur: aſſerebat prætерea duo illa ſufficere ad oportunitatē Geometricā, quoniā dimenſionē vltra trinam natura minime admittit, quod omnis philoſophia confirmat, quæcunque vero per logiſticem ſpecioſam ab eo primum inuentam, deinceps á diuerſis inſigniter promotam effici liceat, deprimi poſtulant, vt rebus ipſis ſub menſurati rationem ca-

dentibus applicata intelligatur, & si quid aliud exquiratur sub algebricis notis, arithmeticæ prorsus, non Geometriæ referenda erunt à materia per opus mentis libera.

SCHOLIVM SECVNDVM

SYmboleitas propositionis huius, cum problemate subnexo olim à nobis, ipsi Inclinationum Appendici, nunc postulat ostendamus quàm incogitanter, à quopiam nescio, inter chimæricas phantasias reiectum fuisset, nec planè mirum, quum parua à nobis exhibita multis, incommoda afferant, & in partes laudis transeant, quæ ab ijs procedunt obbrobria, quia gratis, ac plurimo sint liuore affecti. Proponebatur ibidem, scilicet illud idem vt supra Inter inclinatas BE, BG (nec piget eorum schema vnum repetere) sub angulo EBG recto minore, à puncto extra A, ducere lineam, vt eius pars comprehensa FG, ęqualis fieret præfinitæ AB. Casus fuerant tres pro natura anguli, aut portionis circuli: in quolibet attamen commune hoc erat, dixissent optici, vt incidentiæ angulus fieret ABD, angulo reflexionis EBG ęqualis: igitur doctrina illa haud proposita fuerat vniuersalis (quod sanè factum est modo supra) in hoc schemate angulus fuit semirectus ABD, & triangulũ ABC Isosceles, oportebat ex quęsito ibidem, à puncto A lineam ordinare

dinare

dinare, vt A G, eiusque pars comprehensa datis E B, B G, nempe F G ęqualis esset ipsi A B; supponimus ductam D B indefinitam, super quam ponendo duplam A B ad vsque G punctum ex dato D, erat quæsitum scilicet ex G puncto ad A ducta A G efficeret problema. Cumque nequiuisset rationem effectionis attigere, aduersarij sic neglectam reliquerant, onerantes nos titulis in eorum officina consuetis: vt autem cernant quam facilia eadem fuerant, si dixerint, vt se habet C D ad C B, ita A C ad quartam, euidens est esse D G, quia ex 22 sexti, eadem est ratio quadratorũ quæ laterum eorundem, latus C D ad B C est, vt quadratum 1 ad 2 quadrata, ita A C quadratum 4 ad 8 quadratum D G, in reliquis postea proportionibus pro qualitate arcus supra, aut infra semicirculum, limitata fuerat potentia A B, minuendo, uel augendo eam per gradus iuxta naturam incedendi in planis, per certam quadrati dimensionẽ, sicut in solidis per cubos: præterea cum sint similia A B F, G E F triãgula (facta nẽpè est G E parallela A B) & per

& per 8. sexti similia effecta partialia à perpendiculari B I, si dixerimus A F ad F G, ita AB ad GE; aut A F ad A B, vt F G ad GE in vtraque serie tam erit factũ sub medijs, ęquale facto sub extremis, & colligitur FG ad AB, vt AF ad AB; ideò per 9 quinti, aut 14. eiusdem æquales esse, & tres proportionales A F, A B, G E, seu A F, F G, G E, seu A F, A B, A I, nec desunt media alia, quæ veluti prolixiora consultò reliquimus.

PROPOSITIO QVINTA

Binas medias inter extremas datas rectas lineas, immittere, vt sint in serie quatuor continuè proportionales.

Siue data ratio extremarum, eam tripartitò secare æqualiter.

PRoblema eiusmodi non semel à nobis fuerat constructum, & in Postliminio, vbi inhærentes methodis veterum potioribus, eas ad sanam Geometriæ Euclidis reuocanimus doctrinam; in præsenti vero argumento, ex eodem penu facultatis, per aliam simpliciorem formam rursus constituere placuit, vt tandem aliquando, qui ex aduerso nobis fuerant veritati aßentiantur, & agnoscant sanè proiectam, non desperatam causam suscepisse tuendam.

Sint

Sint igitur AB maior, BC minor datæ in quacumque ratione, inter eas sit opus binas immittere, vt extremarum ratio trifariam secetur. Inclinentur ad angulum ABC rectum, & super BC sit alia DC eidem æqualis in eodem angulo, prorogetur ipsa in H, vt sit DH æqualis maiori AB, deindè iungantur DA, BH, quæ in E sesecabunt puncto, & triangula ABE, DHE erunt similia, & æqualia ex constructione per 15, 29 primi, & 4 sexti: postea angulo DHE, seu ABE, fiet æqualis DEI per 23 primi, & rursus per 31 eiusdem IL æquidistãs sit BH, triangula igitur DEH, DIE, DLI sunt æquiangula ob communẽ angulum ad D, constructionem, & 32 primi: ergo latera sunt in analogia homologè sumpta, nimirum per 4 sexti DH, DE, DI, DL, & quidem continua, ob repetitos vtrobique consequentes: His constitutis producantur indefinitè AB, BC, sub angulis quatuor rectis ad B, deinde relicta DH, quæ fuerat æqualis AB ponentur DE in BF, & DI in BG æquales, erunt tres proportionales, & me-

dia

dia cum extremis duos rectos deinceps efficient; ergo per 13 sexti iunctis AF, FG angulus erit AFG in semicirculo rectus: agatur demum GC parallela ipsi AF Dico BC esse quartam tribus præmissis in analogia; nam tres BF, BG, BC sunt continuè proportionales ex 13 sexti citata; & ostendimus tres alias esse in analogia DE, DI, DL: ergo vt prima BG ad BC secũdam, ita DI tertia ad DL quartã, quare per 14 quinti BG prima æqualis tertiæ DI erit, & secunda BC æqualis quartæ DL; ideò inter AB, BC datas duas immisimus medias, & fiunt AB, BF, BG, BC quatuor in vna serie continua, seu interuallum extremarum sectum est trifariam, quod erat fieri imperatum.

ADNOTATIO.

ET *sanè per hanc methodum non binas tantum, verum etiam plures possumus immittere inter extremas, nec per vnũ gry discesserimus à præceptis Euclideis, lubet locum relinquere, vt alias fecimus alijs: non est inextricabilésque labyrinthum, at modicum quid, facillimum opere, quo circa nemo mihi suaserit recurrendum fore ad aliorum media inofficiosa, neque vlla necessitas vrgere poterit, quod recipiamus instrumenta inuecta à Celebri des cartes in sua aliàs commendabili Geometria (quia per elementa consueta tot medias poterimus reperire quot opus fuerit.*

APPENDIX

PRæterea cum pro dimensionum oportunitate docta cognouisset antiquitas deficere in Geometricis inuentionem trium problematum, ad quæ inuestiganda plures non parum laborarunt, neque eadem cura deinde à successoribus fuisse destituta, authorum memoriæ tradunt: quũ verò ad nostram vsque tempora eadem descendendo indigentia peruenisset, authoresque nonnulli aspexerint per media è proprio planorum genere inuẽta à nemine, atque cogitassent potuisse eadem oportunè per aliena occultari; ideo per inamænos ingredi labyrintos minimè dubitarunt, labores nimirum suscipientes longè supra mediocres, quo autem modo inuenissent ex illis exitus, non desunt, qui eorum vestigia agnoscendo haud probarunt; at sane nisi pro intento, saltem ob ea quæ in comitatu adduxerant, sua non debent fraudari laude: attamen improprietas ipsa eruendi è genere non suo non debuit à natura sustineri, cuius scilicet consuetudo dissimulari minimè potuit, fuisset suos semper effectus promere per simpliciter breuissima, nihil namque in philosophando addere, aut demere ab ea licet, at nostræ notitiæ quidpiam de eius affectionibus cumulare, quo circa satis vnquam deprehendere potui, seu admirari quì factum fuit, quod maiores nostros eadem ægritudo occupasset adeò, ne ea quæ præ oculis haberent minimè perspicerent, & acies oculorum ad valdè dissita mirificè potuisset. Media quippe ad ea problemata con-

F *struenda*

ſtruenda non extra Euclidis campum requirenda erant, nobis ſaltem ita viſum fuit, qui ex illius frugibus duo iàm conſtituta emiſimus, & modò non abſque fænore ingeminare debuimus; idcircò ex lege quadam ſociali ſenſimus teneri, & tertium hoc minimè deſtituere, res ſanè ardua, & nobis inſpicimus conſertum aduerſari agmen, attamen pro cuneo nobis fiet inconcuſſa Euclidis ratio, non æquidem diffuſa, immò adeò collecta, quod tota diſputatio, problema unicum diremta oſtendat.

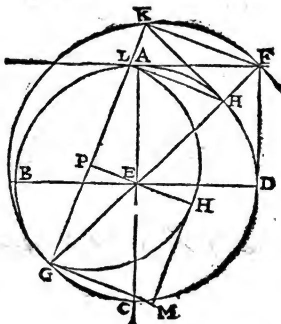
PROBLEMA

Dato circuli ſpatio in quadratum } Commutare Geometricè
& Dato quadrati ſpatio in circulum }

SIt datus circulus centro E, cuius ſuperficies oporteat commutare in quadrati formam. Secetur binis diametris AC, BD ad angulos rectos, & ponatur FA tangens in A æqualis ſedimiametro AE, iuncta per centrum FE pertingat ad G peripheriam vſque, deindè ſuper eandem FG diametrum circulus alter eat, cuius FKG ſemiſſis, ex puncto H vbi datus circulus ſecatur à porrecta diametro, eleuetur HK ad angulos rectos, media fiet inter GH, HF per 13 ſexti; iungantur FK, KG ſecabitur rurſus in L circulus datus. Dico lineam circulo incluſam GL ſpatium poſſe circulo ABCD æquale; agatur HL. Quoniam æqualia fuere AE, AF anguli ſupra baſim EF ſemi-

recti

recti, & H punctum in medio arcus quadrantis A D tangit per 16 tertij: in semicirculis verò anguli F K G, H L G recti per 31 eiusdem, ex construtione rectus G H K; triangula ergo tria puncto ad G commune commissa, & rectangula GKF, GHK, GLH similia sunt, quia anguli reliqui G F K, G K H, G H L æquales, per 32 primi, & quoniam per 8 sexti tres sunt in analogia GF, F K, F H, nec non aliæ tres G F, F A, F H, & inter easdem extremas vnica media cadit ex 13 sexti æquales sunt F K, & F A, hoc est F K semidiâetro dati circuli æquatur, quare ex similitudine eorum triangulorum, in analogia eadem duo erunt ordines F G, G K, G H, G L, & F K, K H, H L; ideo per 20 sexti similes figuræ super binas positæ erunt, vt prima ad tertiam, hoc est in duplicata ratione laterum homologorum, id est vt quadrata G F, G K ita linea GF ad G H, seu vt quadrata G K, G H ita, linea G K ad G L prima ad tertiam, nec non similes figuræ super F K, K H, ita prima linea F K ad tertiam H L: & quoniam quadratum diametri G H maius est circuli superficie, per quantitatem qua-



tuor triangulorum extra perimetrum, quorum vnum est AFD (agatur ipsa FD altera tangens in D) pro excessu isto, sumitur, vt similes figuræ super analogica trianguli latera, ita quadratum super FK ad KH quadratum, & vt se habet per 8 sexti GK ad GH, ita GH ad GL, ita FK ad KH ob continuam analogiam (ideo per 16. & 14 quinti, vt GH fuit dupla FK, ita GL ipsius KH dupla, vt HL etiam HF dupla) Circulus igitur ABCD per 31 sexti est summa duorum à diametris GL, HL circulorum, ita quadratum è diametro eodem HG in duo quadrata sectum est analogicè GL, HL, sunt enim per 2 decimi, circuli, vt quadrata à diametris, & quod erat excessus à circumscripto quadrato supra perimetrum, vt rescindatur potestatiuè è quadrato GH in ea analogia, in qua KG fuit GL, seu GF fuit GH semidiameter FK in eadem analogia cadit in circulo, vt latus quadrati HL: excessus igitur quadrati GH supra perimetrum multatus est à quadrato eodem GH, per quadratum HL; ergo pro spatio circuli perihperia ABCD comprehenso

erit

erit reliquum quadratum ex G L ; etenim ea est ratio G H ad G L , quæ F K ad H L ; nam per 2. sexti ita G F ad G H , vt F K ad H L , hoc est G K ad GL: ex æquo igitur G F ad G H , vt G K ad G L , & permutando G H ad G L , ita F K ad H L , quare quadratum G H est sectum ea ratione in qua duo circuli G L , L H sunt idem circulus G H : quare pro toto circulo est quadratum ex G L , & pro excessu quadrati supra circulum est quadratum ex H L : ergo pro prima parte factum, quod oportuit.

SCHOLIVM PRIMVM

QVO circa seruata dignitate figurę circularis omnium perfectissimæ dimensio obtineri potuit, non accedendo per lineam rectam, infimam in dimensionibus; at pro nobilitate circuli, generis planorum tota potestas moueri oportuit, neque sufficiens fuerat antiqui senis nunquam satis celebrati, methodus comparandi recta cum curua, vt attingeret superficiem in perimetro clausam : de quadratura igitur eiusmodi, quædam adnotauerat F. Vieta libro Inspectionum vniuersalium cap. XXIV sectione 19, cuius sunt hæc sequentia

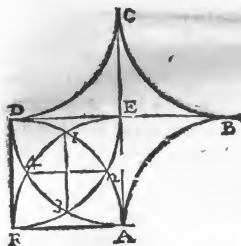
„ *Ad simplicissimam igitur trianguli Geodesiam redu-*
„ *xit eam Archimedes, nulla vel ex eo non dignus lau-*
„ *de, facillimam præbuit, & vsui accommodã, accura-*
„ *tam certè non dedit, neque dabit quispiam mortalium.*

Hec

Hæc ille nimirum pro ea methodo quadraturã, non tamen facultati ſubduxerat, quod methodo alia procedere non poſſet, cum poſſibilem eſſe omnes admittant.

SCHOLIVM SECVNDVM

NON iniucundũ minus fore cenſuimus, quam oportunum, ſi alia via oſtendatur, quo modo quadrati exceſſus diametri ſupra circulum in quadratum etiam colligatur, ſcilicet per eſpoſitam analogiam FK ad KH in circulum tranſeat ſub poteſtate lineæ HL. Iam ſimilia fuere oſtenſa triangula (a miſta AFD, GMN, ſumamus itaque in exemplum ipſum GMN triangulum minus, cuius latus vnum eſt KH, & maioris AFD fuerat FK. Ponantur in ſequenti ſchemate ad angulos rectos AC, BD, æquales vterque ipſi GL in prima figura, & concipiatur completum quadratum extra ABCD punctis ad angulos, ex quibus ſcribantur quadrantes AB BC, CD, DA, ſeſe tangentes in A, B, C, D; formata erit in modum ſtellæ figura, eiuſque ſuperficiem oſtendemus æqualem qua-



quadrato AEDF , ſcilicet in priore figura GPN M ,ſeu ipſi lateri KH. Ponantur ex angulis eiuſdem AEDF quadrantes ijdem ,qui ſe committent ijſdem punctis ,(& ex permutatione centri , arcus ſeſecabunt æqualiter trifariam punctis 1 , 2 , 3 , 4 , & lineolæ ductæ õnia erunt ſecta per triangula diuerſa, quatuor ac quatuor in qualibet claſſe ſimilia inter ſe , accipiamus AE 1 , FA 2 , DF 3 , ED 4 , maiora triangula , iſta ſimul ambiunt ſpatium medium 1 , 2 , 3 , 4 quorum vnumquodque comitetur vnum ex maioribus , ſcilicet vt AE 1 , accedat ſpatiolum , 1 , triangulare m , ita & alij ſequantur numero ſuum , tota ſuperficies quadrati AEDF , deſtributa erit iſtis partibus . Sumamus deindè triangula maxima AED , EAF, DFA , EDF , hæc omnia ſunt ſpatium in ſtella , quęlibet pars quarta , vt ſit euidens : at in hac acceptione ſimiliter relinquitur intactum ſpatium 1 ,2 ,3 ,4 in medio , ſed è contra ,ex minoribus triangulis DE 1 , EA 2 , AF 3 , FD 4 , bina vſurpant maxima quæcumque triangula ; quare ſi vnum , quodcumque deponat ,vt AED , relinquatque DE 1 , eius loco ſibi ſumat vnum ſpatiolum , deuoluitur res ad primam ſpatij diſtributionem AE 1 ,plus ſpatio 1 ,& ita totum ſpatium in quadratum ABCD , quæ fuerat in ſtella , reuertitur in quadratum AEDF , præter propter quod eãdem compenſationem iuſtam etiam ratio geometrica probat ; etenim triangula minora DE 1 , & 1 ,

deeſt

O, 2, habent bases DE, & 1, 2 reciprocas cum altitudinibus, idcirco præter ostensa ex vi analogica, fere ad oculum confirmat ista digressio.

SCHOLIVM TERTIVM

Compendium igitur pro quadratura erit insigne, post tangentem inuentam F A, hoc est auctam diametrum in FG, si dicatur vt prima FG ad secundam GH, ita tertia FK semidiameter scilicet ad quartam HL, erit complementum eius, ad diametri quadratum GH, hoc est quadratum G *L* potens spatium accuratum circuli dati, seu dupla F H, posita in circulo erit ipsa *H* L. Pariter etiam si inter GH, *H* F Inueniatur media in analogia, id est *K* H, ea duplicata erit G L quadratum quæsitum. Quare inter elementa iacebat oportunum medium pro constitutione accurata, tam antiqui quàm necessarij problematis, & fortasse quæ à nobis rudi minerua, ab alijs elegantiora imposterum inuenientur tractata.

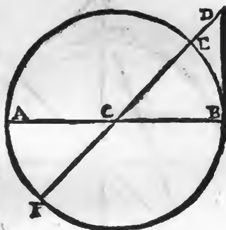
PRO ALTERA PARTE PROBLEMATIS

Datum nempè quadratum in circulum Commutare. *Ad facilitatem igitur peritiores sustineant pro minus exercitatis hoc apponere*

LEMMA

LEMMA

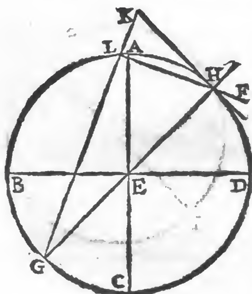
DAta AB, vt differentia extremarum in ſerie trium proportionalium, & BD media, vt exibeantur extremæ, cōponentur ad rectū angulum ABD, & circa AB ſit circulus, centro in C eius medio, per quod tranſeat DC linea pertingens ad peripheriam in F: erit FDE rectangulum æquale DB quadrato per 36 tertij, & reſoluta æqualitate ad analogiam per 17 ſexti proportionales erunt FD, DB, DE.



Poſtea ad problema, ſit latus quadrati in circulum commutandi, linea GL, hæc intelligatur differentia extremarum in ſerie trium in analogia, & media earum ſemiſſis ipſius GL: per lemma igitur inuentæ extremæ, quarum maior ſit GK; à puncto deinde L, ſuper GK erecta normalis ſit indefinita LF, ex puncto poſtea K inclinetur KH eidem ſemiſſi GL æqualis, nempè media aſſumpta erunt tres in ſerie GK, KH, KL; poſtea ſuper H alia normalis inſiſtat, & ſit HG (conſtabit ad idem ſignum G coire) nam HL ab angulo recto

 deſcen-

descendens rectos fuerat ad L angulos; ideò similia fiunt triangulũ KHG, & eiusdem partialia per 8 sexti; ergo angulus ad H æquatur angulo G, proinde HG linea ad signum G concurret: secta itaq; HG bifariam, si è centro E circa diametrum circulus sit scriptus, per 5 quarti, erit circa triangulum HLG, & eundem tangens ipsa KH per 16 tertij: & quoniã duarum HL, HK tertia esset HE (semissis nempè HG) & tres in eadẽ sunt ratione GK, HG, GL, quadratum HE quod erat continẽs excessum quadrati HG supra circuli spatium se accomodat (imminuendo idem HG) per quadratum HL, sicuti KG sub tertia proportionali GL, & complent GL, LH, quadratum HG, & pariter circulus ex eadem diametro GH, suos GL, LH circulos exęquat per 31 sexti; excessus autem quadrati HG supra circulum fuerat per quadratum HL; ergo pro quantitate circuli HLG, stat spatium è quadrato GL, quare commutatum erit quadratum in ęqualem circulum, quod fuit propositum.



SCHO-

SCHOLIVM

ITaque ſpatium circulo comprehenſum cadit ſub potentia rectæ G L , ſi igitur,vt in prima figura ſumatur FK , ſeu F A ſemidiameter , vt in ſerie proportionalium trium ſit prima , ſecunda verò ipſa G L , & per 11 ſexti acquiratur tertia,ea verò duplicetur,erit longitudo ea lineæ æqualis perimetro circuli ; iuncta verò duabus rectis perimetro ſcilicet ęqualis acquiſitæ , & ſemidiametro circuli compoſitæ ad angulum rectum; iuncta inquam hypotenuſa , triangulum illud erit ab antiquis quæſitum lineis circa rectum determinatum ,& ideo hypotenuſa dici poterit contingere initio volutionis helicem.

CONCLVSIO

QVam ſanè fuerit in ſummo difficultatum huius problematis conſtitutio ex meo quippè non addam , vt igitur de plurimorum ſententia nihil dicam,nuper ad manus peruenerat authorem doctum equidem , qui alios de quadratura agentes ſatis recēter in examen ſuſceperat , & diſtaſſe á quæſita pręciſione demoſtraſſet circa finem in ſecunda appendice in quadam oratione declamatoria ita diſcurrit .
„ *Cernitis ò Geometræ,quorum diſputationi traditus eſt*
„ *orbis , quam ægrè in alienam figuram illum conuerti*

„ *contingat, cum ab ipsis matheseos incunabulis, tam*
„ *multi eius Alumni clarissimi, tanta contentione tam*
„ *incassum incubuerint, vnde tanta difficultas, vt ferè*
„ *impossibilitas censeretur ? negemus ne aliquod cur-*
„ *uum inter, & rectum dari commercium ? haud qua-*
„ *quam, &c.* (& post quædã symbola in exemplum
„ allata subdit) *denique nec artificium tenui industria,*
„ *aut remissa contentione ‹ quæ summa semper fuerunt,*
„ *factum censeri debet, vt hunc defectum tam diu passa*
„ *sit geometria, vnde ergo factum ? hactenus inde*
„ *factum, ego quidem reor, vnde imposterum factum*
„ *iri censeo vt posteros omnes Geometras lateat eadem*
„ *cognitio: aliundè scilicet, quam ex ipsius rei natura*
„ *ignorationis huius ratio petenda mihi videtur.*

Deinceps docti illius authoris conuertitur oratio, ad moralem quandam contemplationem sanè amplectendam, cum pia sit, at disceptatio philosophica, ex doctrina sapientum de vno in aliud genus transcendere minimè debet vtcumque apud neotericos contingat frequenter in vsum, nihilo minus duo simul esse nequeunt, quæsito minimè denegare eruendi possibilitatem, & recessum a quæstione, scilicet inquisitione laudare, rationes vtique nobis suadent, necessitati prouisu, cui quod elegantiæ desit politioribus supplendum relinquimus, qui verò tam audacter nobis illuserant viderint quam in probrum sibi contingat damnare ea, quæ neque iuxta modum, neque rem potuerint comprhendere quare

satis

ſatis firmiter rebus fuit reſponſum, nihil præterea ineptis verbis.

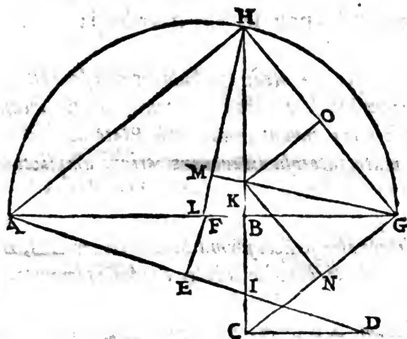
PROBLEMA

De immittendis rectis lineis inter datas, vt efficiant cum extremis vnam ſeriem in analogia

PRO eo problemate in opuſculo ſpeciali ferè omnes antiquorum formulas repurgauimus, vt locum in geometricis inuenirent, nunc verò Platonis inſtrumentum a materiato vſu liberamus, etiam ampliatum ad omnes; ratione non tantum dupla, Deinde nemini inhęrendo per ſimplicia Euclidis principia conſtruamus, mira facilitate alia ſcilicet forma. Sint primum A B, B C in ratione dupla, intendimus inter eas binas immittere, vt vna fiat cum extremis datis ratio cõtinua. Componantur ad angulum A B C rectum, & alius ex aduerſo ſit D C B, ęquales ſcilicet ſint BC, DC, & iunctaD A ſecetur in E per ęqualia, in I verò per inæqualia, cui inſiſtat ad rectos F E ab ipſa A B terminata, erit quadrangulum B I E F in hoc caſu (cuius di ameter eſt F I, duo quadrata potens ex E I) quod quidem quadratum augeatur quadrato A D (hanc dicemus in progreſſu lineam authentam) quæ linea ſic præparata ſuper A B ex A extenſa ſit A G, & fiet diameter pro ſemicirculo idonea ad promendum quæſitum: ſcribatur igitur centro C B prorogetur ad H punctum ad hoc iunctis A H

G H

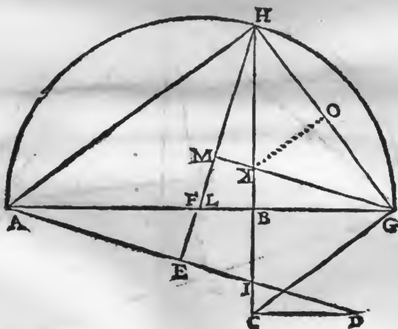
GH, angulus in semicirculo erit rectus; quare tres erunt in serie AB, BH, BG, si iungatur CG, Dico quartam esse ipsam BC, si ergo ostendamus rectum fieri CGH factum erit intentum. Angulo LHB angulus LGM aequalis fiat, & hi duo detracti ab aequalibus LHG, LGH erunt resi-



dui aequales KHG, KGH, & opposita latera; & si HKG angulus per aequalia secetur, & basis GH in ratione laterum per 3 sexti, & triangulum GKH in duo HKO, GKO aequalia, & similia erit sectum per KO lineam, cui angulus vterlibet ad O rectus: agatur KN linea alteri GH parallela, erunt per 29 primi anguli KGO, GKN aequales, & ob angulos, cordae KO, GN portionum aequalium circuli eiusdem aequales, ideò per 33 primi inter parallelas, & aequales erunt, & KO, GN simi-

ſimiliter pares, & Ideò, vt HG ad GO, ita HC ad CK, aut GC ad CN in dupla ratione; ergo æquales CK ipſi HK, immò tres HK, GK, CK æquales commiſſæ ſunt ad punctum K, quò vt centrum ad illarum vnius diſtantiam peripheria tranſibit per earundē omnium extrema puncta H, G, C, reliquà, quo circa angulus HGC in ſemicirculo rectus erit, vt fuerat alter ABG: ergo omnes vnam efficiunt analogiam continuam AB, BH, BG, BC, quattuor, nempè inter extremas datas immiſſæ fuerunt binæ vt imperatum fuerat. AHG

At detur ratio maior quam dupla: iteretur eadem conſtructio vſque quo in ſecunda figura oriatur BIEF



F quadrangulus, & quoniam ſemiſſis AB eſt maior BC, horum quadratorum differentia ſit quadratum X, quod

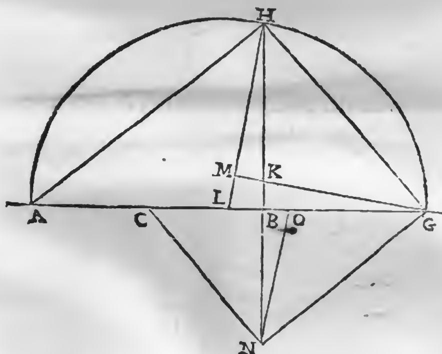
X, quod compositum cum eo ab s F I quadranguli diametro, totũ illud addatur quadrato AD authentę, & linea eadem potens, ponatur super A B, ex A puncto, & sit A G, diameter hęc preparata erit pro oportuno semicirculo, in quo si C G copuletur, rectus erit angulus CGH, demonstratio prorsus vt supra, & factũ quæsitum erit in secundo casu.

Porro si ratio extremarum minor sit quam dupla scilicet B C minor extrema excedat semissem A B, constructio procedet per prosthapheresim, ordinentur ad rectum A B, BC, & reliqua vt supra vsque ad quadrangulum B I E F ortum inter A D, A B, deinde a quadrato B C auferatur illud a semisse A B, & differentia dicatur X quadratum; quod minuatur de A D authentæ quadrato, cui restituetur postea quadratum ex F I diame-

diametro quadranguli BIEF, & tunc erit AD pręparata, vt transeat in AG diametrum circuli, ex quo habeantur quattuor AB, BH, BG, BC in continua serie; cuius demonstratio à præmissa superius forma non differt. Vbi verò contingat addito coæquari ablatum, illibatè tunc authenta AD accipienda erit idonea pro diametro AG.

PROBLEMA SECVNDVM

D*Einde tres postulentur immitti mediæ, non discedendo à præmissa methodo, recipiemus præmissi*



problemati casum primum pro base constructionis in sequen-

quentibus facilitatis ergo, et diametro eidem A G alterum apponemus ex F I quadrato, scilicet acquisiti quadranguli B I E F supra, ea deindè accessione parumper aucta ipsa A G succedet, vt alium semicirculum habeamus, ad cuius scriptionem augentur in analogia BH, B G, & B N, in loco B C erit substituta; ipsa verò quantitate minimè alterata, quod ex hypotesi oportet caueri, super ipsam A B primam recumbet, vt angulus iterum G N C sit rectus, & N C equidistans G H, demonstratio siquidem prorsus coincidet, vt in primæua figura assumpta, ideoque eàdem repetita methodo ad plures medias facile est ampliari, & nos ad plura libenter continemus.

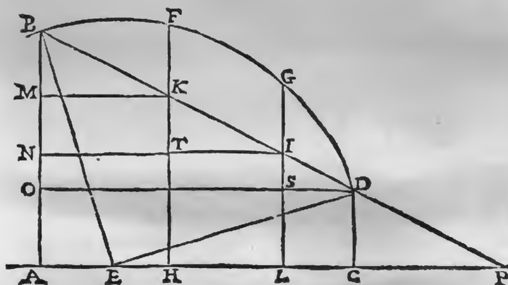
PROBLEMA TERTIVM

Idem construere per alteram, & diuersam methodum.

ET *primum binæ postulentur mediæ inter datas extremas A B, B C, quibus æquetur simul Iacens linea A C, deindè permutatim minori E A eleuetur A B æqualis maiori, & minor C D ad rectos angulos super maiorem E D: centro postea E ad æquale interuallum E B, aut E D arcus scribatur B D, qui fiet quadrans, (nam triangula A E B, & C E D sunt similia, & æqualia ob congruos pares suè angulos, ita quod duo B E A, D E C conficiunt rectum, ergo ex 13 primi reliquus*

BED

BED rectus adest) trisecto itaque arcu BD punctis F, G, & demissis normaliter FH, GL eas abscìdet corda BD, & porrecta indefinitè cum AC occurret, quia inæquales sunt anguli CAB, ABD ex 17 primi



adhibito 13 axiomate; sit occursus in P, proinde erunt HK, LI mediæ inquisitæ, quod ita fiet palam: agantur KM, IT, DS æquidistantes iacenti AC, erunt adhuc inter se per 30 primi, seu prorogatę IN, DO super AB quattuor in serie continua fient AB, AM, AN, AO, etenim PB est ad PK, vt AB, ad HK & sequentes ita PK, ad PI, sic eadem HK, ad LI, & demum PI, ad PD, ita LI ad CD: collegendo itaque in serie sunt AB, AM, AN, AO, quattuor proportio-

 nales,

nales, siuè per alia triangula ABP cum intermedijs similibus BOD, BNI, BMK, argumentum repetieris, proindè immisimus binas inter extremas. Si verò plures requisieris, ab ipsa arcus ampliata sectione res petenda erit, quod satis clarescit si præmissa fuerint percepta, quare, & alteram trisecandi rationem infra inducemus, vt sileant, quatenus oporteat siue mechanica Veterum, siue àplano aliena genera nimis proteruè ab aliquibus prosequuta.

MONITVM I.

AB æquali igitur anguli sectione venit naturalis immittendi inter datas extremas, ac germana ratio: contendant porrò qui volunt, alij obuios nobis repulsos se sentient aliquando, ab ipsa natura insueta violentiam perpetuò tolerare. Affectionum porrò, & passionum obiecti causas agnoscere didicimus eße totum inueniendi laborem ab intellectu requisitum.

MONITVM II.

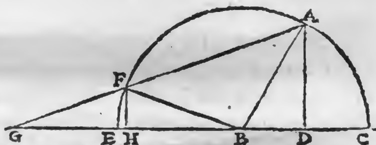
ANimosum sanè fateor fuisse nostrum aßumptum, propugnare scilicet Geometria, nec ignorantes, quam potenter fuissent, & acerrimi oppugnatores. At veritas semper compressa; depressionem minimè sustinere similiter nouimus, neque nobis malè cesserat expurgatio ferè omnium antiquorum, pro suis mechanicis ad inuentionem

tionem

tionem duarum mediarum inter extremas datas, & propugnaculum de trisectione anguli si fortaße satis petitam, integrè non fuißet demolitum, nouo aggreſſu minimè defensuros aduersarij censemus forè, dum è natura vires fuerint irrefragabiles: Proponatur primum angulus hexagoni trisecandus A B C, demiſſa A D in expleto semicirculo perpendicularis bisecabit in D semidiametrum, eam A D ponas indirectum diametro F G, erit datum G, punctum, & connexa AG abscindet de circulo E F, quam dico fieri trientem dati arcus A C: etenim si ex G poneretur semidiametro B E equalis illa tantundem abs F H distaret, quantum distat abs H F ipsa H E, quare per 4 primi ostendetur in triangulis G H F, B H F, & bases B F, G F fuiſſe æquales, & anguli ad G, B in triangulo totali F G B per 5 primi ęquales, & per 32 exterior B F A illos duos æquare, at ille æquatur angulo B A F per citatum elementum, & angulus A B C poteſt internos B G A, B A G iste illius duplus, ergo triplus eius ad G, seù E B F, quare pro angulo hexagoni factum quod oportuit.

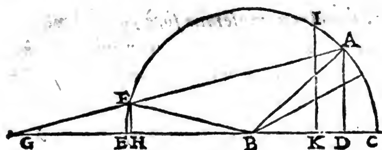
GE, = AD

[EF



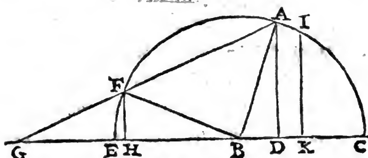
Si verò angulus A B C in figura secunda cedat angulo hexagoni, demittantur normales (expleto prius

ſemicirculo) AD, IK, & quadratum diſtantię D K duplum augeatur ipſi IK, at linea ſimul ea potens, ipſi iungatur diametro, & rurſus erit G punctum datum, quod cum A iuncta linea



ſecabit arcum EF pro triente dati arcus AC, demonſtratio verò (facta nempè præparatione (vt in ſchemate, non recedet à ſuperiore forma.

Si demum ABC angulus datus præſtet hæxagoni angulo, tunc & perpendicularibus demiſſis IK, AD, quadratum DK diſtantiæ ſublatum ex IK quadrato, & linea eam potens differentiam, iungenda fuerit ipſi diametro in EG, ſimiliter punctum G dabitur idoneo ſitu, vt iuncta GA, reſcindens EF erit pro accurato dati AC triente quæſito, non aliter quam ſupra demonſtrandum.



Pro angulo deinde obtuſo, breuiter opus fiet ſi per diuiſionem ordinatè bifariam proſequatur, & in vna ſemiſſi (neceſſario incidenda in aliquo ex præmiſſis ſymptomate) atque

atque inuentum duplatum, quæsitum accuratissimè perficietur.

De angulo porrò recto superfluum erit, cum per semidiametrum in semicirculo adplicatum ex 1 quarti congitum reddatur opus Idem problema apud eos, qui in sententiam Des Cartes iuerunt, solidum manet, neque persuadebunt esse concedendum solidorum generi locum in primæuo planorum, quum lectiones illę situm ortum in sublimi (nimirum in superficie eleuati solidi) nunquam verò in planitie legitimam aßequuturæ descriptionem, fatemur, & ingenuè pluribus adfectionibus communibus vti poße, nam, & circulus pro altera conica sectione agnoscitur, propriumue in plano minimè infirmat ortum, & veluti perfectissima ex planis figura, aliquid etiam de altiori genere sibi collatum ostendit, non ideo sequetur ècontra, distincta igitur maneant in suo gradu genera ex sui natura.

Pręterea quum quisque in poßeßione sit propria euoluendi, & pro trisectione anguli in opusculo alio, nempè Appendix inclinationum nuncupato, nos formam attulerimus erutam ab algebristis scilicet Vieta primo logistices speciosæ inuentore, in eius nobili opusculo per Alexandrum Andersonum illustratum vbi septimam partem dati circuli designant explicatam

I III V VII
7 N − 14 C + 7 qc, − 1 qqc + 7 qc

pro perpendiculari anguli quæsiti, at rationem construendi geometricam minime tradiderant, & quam alibi re-

recepi-

cipimus in aptiorem methodum posse efferri cogitauimus, hic subdere non inoportunum fore visi sumus. Sit itaq; circulus in BC diametrum, eius semissis adplicetur CE, & BE fiet latus isopleuri, quod productum occurrat in D

B
G
F
A
O
N
E
S
K
D
C

cum tangente C erectam per corollp. 16. tertij, fiet parallela eidem AF, & duarum AB, AF tertia in serie BN, ex, 11 sexti, & producta NF ad circulum in G, erit punctum, quo problema expletur: nam iuncta CG fieri cordam arcus dupli heptagoni in circulo, lateris describendi, concludunt Algebricæ rationes sub inuolutis gradibus, & potestatibus, quia septies euoluta dinstantia CG in circulo binas conficit accuratè circulationes ex actis elementis, & ideò semissis ipsius GC, nempè CS, stat pro perpendiculari in angulo heptagoni ad centrum A, & triangulum ACK, vnum,

pro

pro septima parte spatij circulo comprehensi polygoni. Vnde cessat contentio Keppleri manifestè, quòd impossibilis fiat gometriæ describendi heptagonum, immò, & aliorum imparium, vt alibi à nobis ostensum fuerat olim, atq; in vniuersum per allatum generalem canonem, pro enneagono dum algebristæ suo more asserunt $\overset{I}{9N} - \overset{III}{30C} + \overset{V}{27qc} - \overset{VII}{9qqc}$ *stare pro nonanguli perpendiculo, & sequentibus lubebit, nec difficulter accuratam exhibere delineationem, quam artifices illi primarij nobis occultarunt.*

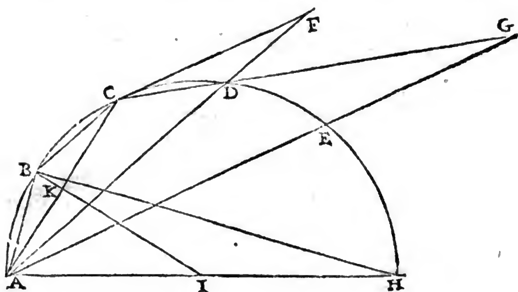
DIGRESSIO.

PRO inscribendis in circulo polygonis ordinatis, haud fortassè incommoda fuerat methodus, præcipuè imparium laterum, quam olim inopusculo, cui appendix geometriæ inclinationum nomen inscribi voluimus, tradita, quoniam nullam quotcumq; laterum figuram circuli potestas haud complectitur regularem, & quippè canonum, vel tabularum conditores ob paucas imparium, quas repererant à Veteribus relictas non immeritò cum alijs artificibus frequenter inuenimus conquestos fuisse. Verum in aureo Vietæ opusculo scilicet ad sectiones angulares inspicientes, formam agnouimus perelegantem posse produci, vel saltem calculo ad integrum semicirculum distributum, vt cordæ omnes subtensæ

tensæ per analogiam limitentur, quod in commentario Andersoni facilè dignoscitur : at quoniam illud opusculum non facilè habetur, neque omnibus authoris illius opera commodum est recipere, ideò vt non asymbola alieno fulgore nostras adornare vmbras libuit, nam ad propositionem quartam sequentia posuerat.

Si à puncto in peripheria circuli partes sumantur quotcumque æquales, & ab eodem ad singula sectionum puncta rectæ agantur, erit vt minima ad sibi proximam, ita reliquarum quæuis deinceps à minima ad summam duarum sibi vtrinque proximarum.

Sit circuli circumferentia quantalibet A E secta in-



partes æquales quotcumque, quibus rectæ subtendantur AB, BC, CD, DE, & aliæ educantur rectæ, AC, AD,

AD, AE, iunganturque rectæ CF, DG ipsis CA, DA æquales: deindè ab extremo reliquo diametri AH agatur HB, & à centro semidiameter IB, erit triangulum BHI simile alteri ACB, nam angulus AHB æquatur IBH ob isosceles triangulum, ita in altero ad A, & C anguli æquales, & ideo per 32 primi BIH, ABC anguli sunt pares: si fiat igitur, vt AB ad AC, hoc est BI ad BH, erit etiam AC ad AF in serie tertia, quæ multata DF excurrens extra circulum, fiet corda trium partium quæsita; etenim CDF est simile triangulo Isosceli ABC, & æquale adhuc propter æqualitatem laterum AB, CD, Ita similia, & æqualia succedunt ACD, GED, & AD, ad AG in eadem analogia sunt, in qua BI ad BH, seu AB ad AC, & amputata magnitudine GE æquali AC, corda relinquitur AE limitata ad quattuor partes æquales; quæ ratio ad omnes partes, quæ signatæ fuerint in semicirculo extendi poterit calculus sub speciosæ forma, non adeo expedita, vt per numeros arithmeticos consuetos: magnitudo porrò præcisa à continuo eruetur, etenim sapienter ille totius geometriæ Parens antiquus Siculus in opere quadrandi circuli limites sibi selegerat in figura 96 laterum polygona scilicet, nam gnauiter sciebat accuratum implorandum à magnitudine non discreta, & in opere quod texerat sibi sufficiens fuit vlterius non progredi.

An verò ad accuratam circuli quadraturam nostra, quam etiam infra inculcare libet, Methodus iuuare que-

at,

at; quamuis geometricus per omnia progreßus ambigere minimè ſinat: nihilominus in tam graui cauſa per tot ſęcula exagitata, cum facilitate operis, non modicum admirationis hoc eſt ignorantiæ ingerant; parati tamen, ſi quiſquam de veritate monuerit è campo excerptam ei ad manus herbam porrecturi, vt vt de medijs duabus inter extremas, & de anguli triſectione è ſinu geometriæ eruta problemata, animum adiecißent, vt à ſummo omnium manus ne retraheremus problematum. Contendant alij longius à plano generi licuiße inueniri quęſitum nullo tamen affecti pręiudicio ſui fętus, vix credam in opere exhibere potuerint latus potens circuli ſpatium, & vice verſa de quadrato in circulum illud idem commutare quam ſimpliciter Euclidis docent elementa. In re itaque tam longè diſſita fuit munimen, quòd dimenſiones ſecum afferat ipſe circulus, ſi per naturalem greſſum analogia fuerit inſtituta.

AP-

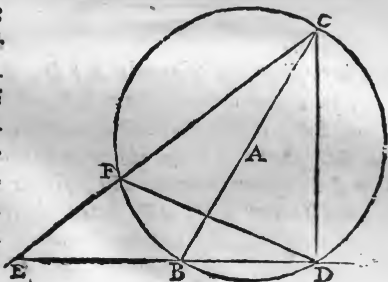
APPENDIX ALTERA

PROPOSITIO PRIMA.

QVoniam in Scholio tertiæ Propositionis supra indicauimus Methodum Vietæam pro constituendis duabus medijs inter datas extremas in ratione dupla, ab Authore in singulari casu excogitatam, vt illud vetustum absolueret Problema de duplicatione cubi, & quia ingeniosa est, ne studiosus Lector aliunde petere cogeretur, rem non ingratam fore existimauimus si integram Authoris formam hic referrem quod habetur in octauo variorum, capite V, vt infra.

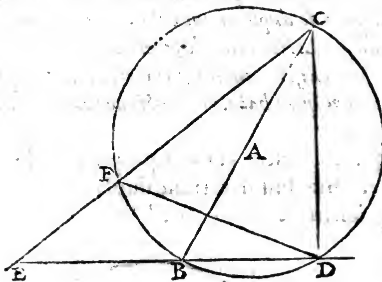
Describere quatuor lineas cõtinuè proportionales, quarum extremæ sint in ratione dupla.

Centro A, interuallo quocumque, describatur circulus, & acta diametro B C, sumatur circumferentia hexagoni B D, subtẽdantur lineę B D, D C, & in continuata D B ponatur C E secans circulum



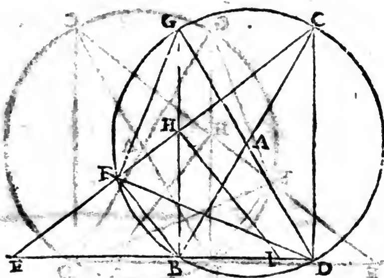
I lum

lum in F, itaut F E sit æqualis B D (hic effectio Authoris claudicat ob postulatum, quæ in Scholio proximo geometricè dirigetur) seu A D, vel A C vt semidiametro circuli, iungatur D F. Dico proportionales esse continuè quatuor E F, E B, F D, B C. Quoniam enim triangula E F D, E B C angulum habent ad E communem, ipsi autem angulo E C B, æqualis est angulus F D E, cum vtriusque amplitudinē duplā definiat circumferentia eadem B F; ideò angulus E F D angulo E B C est æqualis, reliquus



videlicet reliquo, & triangula E F D, E B C similia, quare ex vi similitudinis est vt E F ad E B, ita F D ad B C. Porrò actæ C D agatur æqualis, & parallela B G secans E C in H, & ex eo puncto super eãdem E C agatur normalis H I, secans E D in I, & connectantur G F, B F: triangala igitur rectangula fiunt E F B, D F G, anguli enim ad F recti sunt, sed anguli F B C amplitudinem duplam definit circumferentia C G F, & consequenter anguli exterioris videlicet

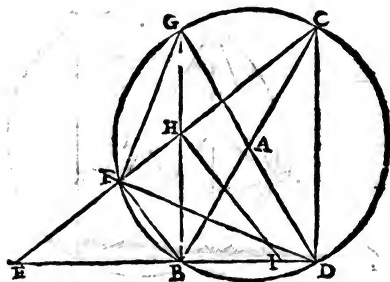
delicet F B E duplam amplitudinem definit F B D, angulus igitur F B E angulo F G D est æqualis, & reliquus reliquo; quare triangula E F B, D F G similia sunt. Ipsi autem E F B simile est triangulum E H I, quia parallelæ sunt F B, H I vtraque secans perpendiculariter E C, hæc ex constructione, illa ex vi circuli, est igitur vt F D ad D G, ita E H ad E I, & vt E F ad E B, ita E H ad E I: est autem vt



E F ad E B, ita E B ad E H, propter triangulorum quoque E F B, F B H similitudinem, quare proportionales sunt continuè E F, E B, E H, E I; sed ratione parallelarum est quoque, vt B D, id est E F ad E B, ita H C ad E H; quare H C, E B fiunt æquales. Dico quoque E I æquari B C. In triangulo enim E B C obliquangulo, cuius altitudo C D, quadratum ex E C æquale est quadratis ex B C, E B singulis vna cum eo,

I 2 quod

quod fit ſub E B, B C, bis: ipſum verò quadratum ex E C æquale eſt etiã quadratis ex E H, H C ſingulis, vna cum eo, quod fit ſub E H, H C bis. Vtrinque auferatur quadratum ex H C, ſeu E B, quadratum igitur ex E H vna cum eo, quod fit ſub E H, & E B bis æquatur quadrato ex B C, vna cum eo, quod fit ſub E B, B C, id eſt æquatur facto ſub B C, & compoſita ex E B, B C, ſed quadratum ex E H valet factum ſub E B, E I;



facto autem ſub B H, E B bis æquatur factum ſub E F, E I bis, factumue ſub B C, E I; quare factum ſub E I, & compoſita ex E B, B C æquatur facto ſub B C & compoſita ex E B, B C: eſt igitur B C æqualis E I, & ſunt continuè proportionales E F, E B, E H, E I: ſed erat, vt E F ad E B, ita F D ad B C, quare F D quoque eſt æqualis E H, & ſunt cõtinuè proportionales E F, E B, F D, B C; primæ autem E F extrema B C eſt

dupla

dupla; constitutæ igitur sunt quatuor lineæ continuè proportionales EF, EB, FD, BC, quarum extremæ sunt in ratione dupla, quod erat faciendum.

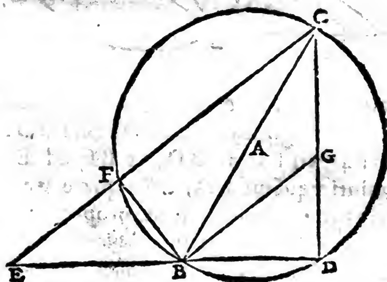
Est autem mechanicè benè obita, & absoluitur vna quod aiunt circini adapertura

sit	*EF.*	100	000	000.	1
sit	*EB.*	125	992	105	11
	FD.	158	740	105	111
	BC.	200	000	000	1111

hactenus Authoris verba, epilogismus ex eius mechanico

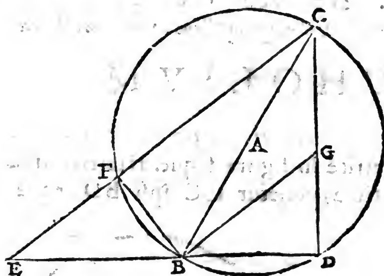
SCHOLIVM

VT igitur eius effectio vtroque incedat pede Geometricè in figura sequenti tertia, quæ Authoris est prima, ponetur CG ipsi BD æqualis, & acta BG, eidem æqualis fiet BE indirectũ DB, & iuncta CE ipsa relĩquet sui partem interceptã cum peripheria, nẽ-



pè

pè FE, æqualis ipsi BD. Iungatur BF erit in quadrilatero BFCD circulo inscripto angulus FB E externus æqualis FCD; at angulus EBG obtusus desuit abs duobus rectis per angulum GBD ex 13 primi, & obtusus EBG per 32 primi valet duos internos ad G, & D, cumque alter ad D sit rectus & DGB possit duos GBC, GCB, erit tùm summa DBG, DCF vnus rectus, tùm DBG, DGB, quare ipsi anguli D BG, FB F etiam summant vnum rectum; ergo sunt D GB, DC F æquales, seu DBG, BEF æquales inter se, & consequenter parallelæ BG, EC, similia ergo fiunt duo triangula BDG, BEF, & per 4 sexti BG ad BD, vt BE ad EF, & per 14 quinti æquâtur BD, EF, quare Geometrica effectio pro quatuor continuè proportionalibus ordinatè procedit iuxta Euclidis concessa in casu isto singulari, qui pro duplicando cubo nobilis est, & omnia Veterum molimina rationabiliter excludet.



SCHO-

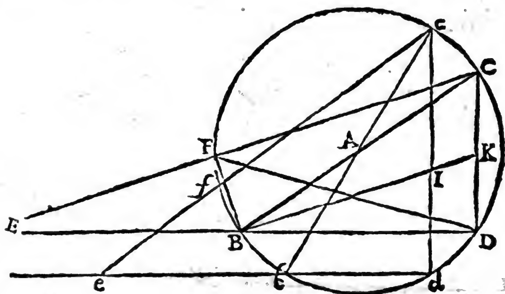
SCHOLIVM

NEque admodum ardua res erit, in quacumque alia ratione, quam dupla, inuenire medias binas inter extremas per eandem Vietæam methodum. Sit igitur triangulum *b c d* rectangulum in circulo, cuius diameter *b c* hypotenusa illius dupla sit basis *b d*, & ad instar authentæ iam æqualis ipsi

b d facta sit *e f* intercepta peripheriæ circuli, & educta *d b*, quod demonstratum est. Detur itaque B D basis alterius circuli B C D, vt sit noua ratio diametri B C ad basim B D, oporteat eandem ponere inter hanc eductam, & peripheriam circuli eiusdem: agatur B I ad vsque perpendiculum C D vt in K, & tota B K in directum D B relata æquetur B E

fiet

fiet triangulum BDK rectangulum simile BEF propter angulos æquales, & per 4 sexti prorsus æqualia erunt ea triangula. Agatur DE, erunt CBE, DFE triangula similia (ob angulum ad *E* communem, & ob eũdem arcum FB pro angulis BCF, BDF, & reliqui per 13 primi, ac 32 eiusdem, anguli CB*E*, DF*E* æquantur) eorumuè latera in



analogia, per eam igitur methodum, absque eo quod repetatur concludi licebit, quatuor BC, DF, B*E*, F*E* esse in continua ratione, hoc est BC ad F*E*, seu BD ratio æqualiter trisecatur quod faciendum assumpsimus.

Si verò daretur extremarum ratio maior quám dupla basis vtique caderet infra *bd*, & in noua DC, æqualis DK designaretur & fieret noua *E*F æqualis ipsi minori termino, quod nouum non con-

non fuit necesse delineare schema, hæc sanè fuerant addenda pro casibus non rectè explicatis supra propositione tertia, in opusculo hoc vbi modus fuerat in ea indicandus iuxta exigentiam rei.

PROPOSITIO ALTERA

QVum Problema propositum supra pro quadratura in quadam oportunitate fuerit paulo aliter repræsentatum à nobis, & requisitum à non nullis, inconueniens nullum aderit si ea sub forma iterum exposuerimus, reformata scilicet ea figuratione simpliciore, in qua diametrum circuli G H sumimus, vt extremarum differentiã, in serie triũ, quarũ media semidiameter H E, inuentisque extremis F G, F H per lemma, & circa F G alter semicirculus scriptus, cuius peripheria secabit erectam H K super puncto H perpendiculariter in F H, id est diametro,

K & inter

& inter F H, H K ponatur F K, hanc ostendemus æqualem esse ipsi semidiametro dati circuli; deinde iuncta K G, ipsa secabit circulum datum puncto L. *Dico eius partem lineæ K G supple G L fieri latus pro quadrato, quod æquetur spatio circuli, cum ex puncto F demissæ sint perpendiculares F C, F D, & quadrantem comprehendant, erunt tangentes super extremis diametrorum A C, B D, quare per 36 tertij quadratum F C æquetur facto sub G F in F H, & per 17 sexti tres in serie F G, F E : F H, cum deindè triangula tria F G K, K G H, H L G, propter rectos, ex vi semicirculorũ, & ex cõstructione habeant communem angulum ad G; & per 32 primi reliqui æquales sint, latera eorum proportionalia erunt, hoc est F G, G K, H G, nec non per 8 sexti F K, K H, H L sint in eadem serie, erunt tres pariter in analogia G F, F K, F H; quare inter easdem extremas G F, F H tàm media erit ipsa F K, quam fuerat*

fuerat CF, & per 13 sexti vnicã esse oporteat, sunt ergo æquales FK, CF, seu HE. Cumque quadratum super FG prima, ad illud super secundam GK sit, vt prima FG ad tertiam GH per definitionem 10 quinti, & propositionem 20 sexti, & in eadem analogia sint GK, GH, GL, pariter quadratum sub GK ad illud super FH, vt prima linea GK ad tertiam GL, fiet vna ratio FG ad GH, & GK ad GL, ideo secantur proportionaliter latera FG, KG, & ita se habebit GH ad GL, vt FK ad KH: quare sub eadem analogia differentia extremarum GH, & media FK deprimuntur, vt se ad vnum punctum in circulo committant ad angulum rectum HLG, & eorum quadrata restituant quantitatem quadrati abs diametro GH, quod fuerat explicatum per circumscriptum quadratum ipsius diametri, & quia duo circuli super diametros GL, LH per 31 sexti sunt ipse circulus ABCD, & circuli inter se sunt in ratione quadratorum per 2 duodecimi à diametris; ergo cum quadratum GH superet spatium circuli, & circulus ex GH illum ex GL per differentiam circuli HL. Idcirco ex eadem analogia quadratum GH excedat GL quadratum, per eam differentiam excessus supra circulum, quare quadratum ex HL stabit pro excessu collecto ex quatuor triangulis, quorum vnum est CFD, & relinquetur pro circuli spatio ABCD ipsum quadratum ex GL, & nisi quis ostenderit aliquid in analogia obstare ex conuexo, & concauo ipsarum GH, FK linearum in depressione, vt

ad punctum L conueniant, & officiant geometrico operi manifestum erit subsistire hanc formã per principia concessa Euclidis.

SCHOLIVM

QVoniam per 22 sexti in ea ratione est HG, ad GL, & FK ad KH, vt sunt eorum quadrata, permutando per 16 quinti, vt HG ad FK, ita GL ad KH, quare dupla sit tam HG ipsius FK, quam GL, reliquæ KH.

SCHOLIVM ALTERVM

QVod autem superius diximus reciprocari posse problema hoc, absq; vlla figuratione circuli admodum facile est, at pro minus exercitatis nõ inutile erit explicari in eodem schemate non conceptis circulis, sint duo diametri AC, BD ad rectos in E angulos, & ex extremarum differentia HG, & eius semissis media inueniantur extremæ GF maior FH minor ex lemmate, & eleuata puncto H super GF perpendiculari indefinitè inter eam, & HF sub angulo recto ponatur KF æqualis mediæ in analogia nempe EH, dabitur punctum K, ex quo normalis super FK acta necessario copulabitur in G, quia angulus KGH, æquatur FKH per 17 primi, & 8 sexti; porrò ab eodem H parallela HL facta ipsi

FK

FK, rescissa GL erit latus quadrati quæsiti; e contra vero data sit GL pro latere, & quæstio sit de diametro inuenienda, eadem via differentia extremarum sit GL, cuius semissis media, & per idem Lemma inueniantur extremæ, scilicet GK, KL; datum ergo fiet punctum K: deindè super GK ex L puncto sit eleuata normalis LH interminata, inter eam, & minorem KL ponetur linea æqualis semissi datæ

GL, hoc est KH, dabitur punctum H, ex quo rursus super eandem KH alia normalis erecta HG concurret in eodem G puncto ex supra citatis elementis ob similitudinem triangulorum FKH, FKG; quare data erit ipsa GH, quæ in E diuisa bifariam

fariam

fariam erit quæſita diameter. Vnde patet quod ea ſeruata conditione reciprocè habeatur latus quadrati, & ex eo rurſus diameter; an verò conſentiat præciſio videant alij, certè inter Authores, qui de hoc argumento ſcripſerunt à nemine (quatenus nobis contigit vidère) methodum magis expeditam minimè obſeruauimus intra Geometrica principia.

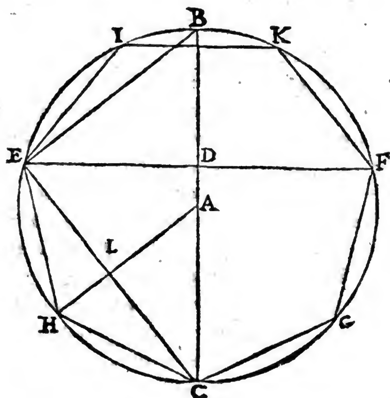
FINIS.

EPISAGMA.

IN dato circulo heptagonum ordinatum inscribere forma Geometrica eius Problematis per omne sæculum perseuerauerat indigentia, adeò quod aucta difficultate nostro quidem æuo Ioannes Kepplerus in eam proruperat sententiam, non esse amplius eius constructionem inquirendam; at inter impossibilia rerum reiciendam nihilominus nobis olim contrarium conceperamus: idcirco eduximus methodum generalem pro omnibus polygonis cuiuscunque speciei, per naturalem scilicet geometriæ analogiam, nulla ratione improbandam: & quoniam adhuc querelæ pro eiusdem indigentia non desunt libet iterum singulari quæsito, & vnicam exhibere constructionem, miror attamen, quum neque in Zenonis porticu, aut Democriti puteo latitaret ratio efficiendi illud problema, a nemine fuisset eductum, & lacunam adeò suspiratam in planitie adæquatam, vtcumque res sit. Proponatur semidiameter AH, neque circulus delineatus, dico septimæ partis futuri circuli cordam exhibere liceat, paucis, quod sanè ad paradoxum accedere primo aspectu, quispiam posset asserere.

Ipsa semidiameter AH secetur in L in ratione habente medium, & extrema ex 3 definitione sexti, a quo puncto ad angulos rectos excitetur LC, cuius quadratum æquale ei pro differentia AH quadrati supra illud ex AL factum a maiore portione sectionis analogice, & iuncta AC, & trianguli basis C

H Dico eam esse cordam pro arcu septimæ partis inquisitæ. Scribatur circulus, cuius diameter BC, & hæc secta eadem analogia in D, erit per omnia in ratione dupla ad ipsam AH, scilicet DC ipsius AL &



reliqua DB alterius LH, ut tota totius ob similitudinem sectionis: agatur postea EF ad diametrum in D ad angulos rectos, atque iunctis CE, BE, erit angulus in semicirculo CEB rectus, linea verò BE æqualis DC, quod accipimus demonstratum (compendij causa) ab authore Apollonij Galli in illius appendicula ad 7 problema; erit itaque triangulum BED constans à lateribus in analogia: si

verò

verò a quadrato diametri BC auferatur quadratum ex DC, seu BE, erit reliquum potens, vel differtntia ipsa EC. Et quoniam ea omnia triangula DBE, CDE partium cum toto BCE similia fiunt per 8 sexti, quibus accensetur CAL propter æquales angulos cum cæteris, & subcontrariè positum cum CDE, omnia igitur easdem retinent proprietates, cum igitur triangulo ACL adnexum sit CLH constans à latere minoris partis sectionis analogicæ LH, & LC quadratum differentia inter AH, & maioris portionis quadratum, si posuerimus in toto circulo similia latera nimirum BD minor portio sectionis, & ad D punctum ad rectos angulos aliud latus pro magnitudine EC (quod ad concipiendum in schemate perfacile adest) erunt duo latera cum recto similia lateribus HL, LC: ergo quemadmodum connexa ex HC fuit completum triangulum CLH, ita hypotenusa ex termino magnitudinis EC posita in D iungenda ad B triangulum perficiet illi prorsus simile, & vt illic CH fuerat amplitudo cordæ pro arcu HC, ita hic ea connexa æquabitur duplæ CH, & ipsa CE, quæ fuit quadratorum differentia BC, BE, seu DC æquales corda CE dupla CL, & quidem ipsam CL ab authore Vieta in aureo eius opusculo ad sectiones angulorum enunciata fuerat, voce perpendiculi congrui pro angulo septanguli, vt reuera apparet in CAL triangulo, quod ille deduxerat per proportionem octo linearum ex instituto assumpta analogia in forma

spe-

speciosæ logistices, ad caput sextum; nos autem per elementa Euclidis à geometria non discessimus, latebat itaque effectio ista heptagoni copulata elemento ni fallor omnium præstantissimo, at operi pernecessario. Igitur factum fuit, & præostensum constare Problema ad heptagonum, duo namque partes obit C E, ex altera duas C F, quatuor in maiore portione, tres verò in minore, etenim ex E in K, & vice versa ex F in I, ambientes bis I K, qua semel sublata, septem æquales sunt E H, H C, C G, G F, F K, K I, I E, & totum hoc non debuerat subtrahi à præsenti aggregato Euclidi offerenda. At elegantius: H C media inter duplam G H, *& H L per 8 sexti fit latus baptagoni.*

AH

BRYSSO REDIVIVVS

Seu de

Geometrica Circuli quadratura vnico ſoluta Problemate.

ROMAE,

Typis Angeli Bernabò à Verme. MDCLVIII.

Superiorum permiſſu.

ILLVSTRISS. AC REVEREDISS. D.

D. CAROLO EMANVELI VIZZANIO

BONON. PATRITIO

Vtriusque Signaturæ Referendario, S.Officij Assessori, Aulæ S.Concistoriali Aduocato, & in Archigymnasio Rectori deputato.

A. SANCTINIVS LVCEN.
Congregationis Somaschæ Sacerdos, & in eodem Archigymnasio Mathematum Professor F. P.



AXIMA in publicis studijs inuenitur controuersia, Illustrissime, ac Reuerendissime Præsul, ob duas admodum implexas quæstiones, quarum neutra fuerat resoluta, vtvt nec indiligenter disceptatas, immo continenter inquisitas. Vna de compositione continui inquirens (cuius tres fiunt gradus, vt sunt dimensiones) altera verò commutandi spatium circuli in quadratum accuratè. Prima videtur petere, quod est arcanum naturæ, scilicet illius modum in productione rerum; longè

§ 2 diuer-

diuersum ab eo, quod dispensatum fuerat humanæ menti, vt scilicet species recipiat à sensu, quare in disputatione relinquendum, nec valde ambiguum an conciliari poterunt Philosophi.

Secunda deinde quæstio tota est geometrica, & per ea, quæ ab ipsa humana mente concipitur potest assequi, ex suis principijs, nempè elemẽta propria, & quoniam à nullo hactenus fuerat assumpta per ordinata media, plurimi in difficultates sese repererant inuoluti, quam possent liberari, & reliquerant ea, quæ fuerant à natura, vt prosequerentur conceptiones ad rem minimè conducentes. Proinde dicimus ex inordinatè propositis natam difficultatem, & nos assequuturos speramus per simplicissima media quæsitum hactenus opinatũ inter impossibilia; quod idem infortunium acciderat ipsi heptagono ordinato, quem à nullo fuisset exploratum tam manifestum habetur, quod probatione non indigeat, adeo quod multa relicta in geometricis, quasi pentagonus transitum obduxisset ad vlteriores polygonos; attamen duo hæc problemata simplicissimè per elementa ritè percepta, & ordinata, construuntur, vtque post inuentionem mirum fiet, quomodo ignoratum fuerit à tot cultoribus Lyncæis.

Duo igitur ea problemata inter eas immisimus propositiones, quas diximus Euclidi restituendas, non tamen ita explicata, vt necesse fuerat, quare

rursus

rursus exponere pro nostro modulo eramus obnoxij.

Opusculum igitur qualecumque fuerit ausimus tuo nomini nuncupare, quoniam non debuimus dignorare illud sapienter assertum, quod ardor discendi prima fiat magistri dignitas, & à te quam maximè fuisset custodtum; quoniā in ætate florescenti post omnem à Græcis, ac Latinis eruditionē adeptam, elegeras ex professo studium interpretari philosophicum, vt per grauiora porrò clauderes Cyclopædiam integram, interim Latinis antea ignotum dederas, Ocellum, & tuis illustratum commentarijs, & deinde multiplici laurea decoratus. Ad Iuris prudentiæ labores conscenderas.

Cooptatus scilicet in eo Sapientum Collegio, qui in Aula S. caussas agere queant. Pluribus deinde oneratus munijs, quæ omnia decenter sustines, dotatus à natura, viribus, ac temperamento, adeò quod nullum te negotiū inuenire potuit, quo minus ab vno in aliud intendere tibi non sit liberū, difficiliaque penetrare, atque responsa pro quæsitis sapienter promere.

Neque tot implicitus curis, si quando detur a publicis negotijs quiescas (non tamen à laboribus) quoniam in morem duxeras, tunc te retrahere (quasi per amęna viridarij) inter dilectos Pluteos, Selectorū scilicet authorum, vt moliaris aliquid ex Genio, vt modò accepimus ad explendum cōmentarijs

tarijs tuis exornare, quod reliquum feceras de assumpto titulo, cuius partem in lucem emiseras de Principis mandato. In hanc igitur solitudinē meū optarem te inueniret opusculum,& posset à Genio impetrare duo ad summum quadrantes horæ, vt illud inuiseres; (etenim extra illum locum, & importunum, & molestum foret) siquidem de tua probatione ratus nullus sperarem mihi posset ingerere metum, quia cum integra phalange pugnaturo non ignatus fueram. At dum Geometria propugno eius instructus armis saniores ad nostras transituros partes minimè sū ambiguus; ideo posset protectus ab intelligentia, nec fucum nobis facere quisquam de vulgo: pro ea igitur quam consecutus fueras doctrina, opellam ne despicias oro; res enim habet non pendenda à mole, at ex viribus, quibus non pauca per totam Geometriam sanari postulant, vt duo fuerant ista problemata, quæ à multis iam annis sua tenuerant idonea media, neque ab authore (ad aliud intento) cognita, neque ab alio perspecta, vt resultarent quæsita, quare quod vni fiunt vt elementa, alius assumit ad incrementa; ideoque in Geometricis nullus finis, neque mea erga te deuotio, atque obsequium limitem. Vale.

Ego

EGo infrascriptus perlegi Opusculum, cui titulus; Bryslo rediuiuus, à R. P. D. Antonio Sanctinio Nostræ Congregationis Sacerdote, & nihil in eo reperi contra Fidem, aut bonos mores. Ideo facultate super hoc specialiter mihi facta ab Adm. R. P. D. Paulo Carrara Præposito Generali Nostræ Congregationis, vt Typis mandetur concedo, seruatis tamen seruandis. In quorum fidem &c. Romæ in Collegio Clementino die 15. Octobris 1658.

D. Hieronymus Rubeus Visitator Congregationis Somaschæ.



Impri-

Imprimatur si videbitur Reuerendiss. Patri Magistro Sacri Palatij Apostolici.

M. A. Oddus Episc. Hierap. Vicesg.

Imprimatur.

Fr. Raimundus Capisuccus Mag. Sac. Pal. Apost. Ord. Præd.



Ex literarum euersione in Opusculo sunt quædam typographica errata, quæ absque scrupulo remitti queunt prudentiæ Lectoris, & sequentia correximus.

pag.	9.	*l.* 3.	*m icirculo*	legas	*in circulo*
p.	11.	*l.* 9.	*quara*	l.	*quadratum*
p.	23.	*l.* 4.	*inserit*	l.	*in se erit*

PROLOQVIVM.


ROPTER effectiones plurimas, ac proprietates quas de circulo Veteres obseruarunt, & in Mathesi præstantiàm, præter ea, quæ ad humanos vsus commoda & vtilitates prouenire nouerant, problema de dimensione illius excitarunt, in quo nec omnes conuenerant, fuisset scilicet solubile, vel non, ita ex Aristotelis interpretibus habetur. At ex ijs qui affirmàrunt tres nobis memoriæ referunt; quorum primus fuerat Hippocrates ab insula in qua ortum duxerat dictus Chius, Iste suum modum non malè inceperat, nempè à principijs Geometricis haud digressus, deinde pro circulo degenerauit in quaudam eius partem à forma lunulam dictã, seu meniscum quadrauit, at quia res noua fuit & ad incrementum fecisset, non fuerat eiectus.

Secundus accesserat Antiphon inter philosophos tunc non de turba, de eo habetur dixisse non differre circulum à prolygono laterum minimorum nullo modo perceptibilium, at per hoc assertum, inferebatur auferri à continuo quod esset de essentia, scilicet potentiam secandi, & quod duo possent dari absque medio puncta, quod fue-



rat contra naturam continui, reprobatus mansit. Tertius deindè fuit Brysso, de quo philosophus in primo posteriorum, & in Elenchis commemorat reprehendens, quod in assumpto defecisset, quia de communi fuerat, non ex proprijs, vt oportuit; & illius paralogismum aiunt plures ex Eudemo Latini ac Arabes hunc fuisse. Vbicũque est maius & minus ibi est æquale, sed in rectis lineis figuris datur circulo maior, supple quadratum diametri circumscriptum; datur minor, per quadratum inscriptum, ergo datur & æquale, & hoc sanè ratiocinium de potentia concludit, opus namque erat inter ea duo quadrata in ratione dupla indicare punctum in quo in circumferentia æqualitas ea consisteret, quod non fecerat Author ille, neque quisquam ab alio hactenus præstitisse reperimus.

Archimedes verò suo admirabili ingenio considerauit quantitatis genus duo includi, discretum, & continuum, in sua abstractione non immisceri, at in concretis iuuari ad inuicem, Ideò nobis proposuerat comparationem diametri cum peripheia, & per descriptionem, at inscriptionem similium prolygonorum aperuit viam procedendi absque limite, sibi vero sat fuerat, qui omnia ad opus duxerat, sistere ad prolygonum 96. laterum, eam methodum porrò prosecuti fuère nostris temporibus post alios anteriores authores industrij, qui

appro-

appropinquandi magis, ac magis posse, at rem acu tangere nouerant impossibile fieri, natura repugnante discreti generis, ex genere continui artifex ille magnus aliam excogitauit methodum, per occursum duarum rectarum linearum cum spirali, vna ad rectos angulos eleuata contingens circulum in principio spiralis indefinitè, aliam verò contingens spiralem in principio conuersionis, & quamuis delineatio spiralis non sit geomètrica; non defuerunt cultores, at minimè potuerant eam tangentem helicis determinare, quod, nec fecerat ille supremus author, verum ea inuentio ab artificibus culta in materiatis suas habet vtilitates, quare problema dequadratura non fuerat per tot tempora exhibitum, ad hoc probandum mihi labores non sumam, cùm Io: Gerardus Vossius nostri temporis conspicuus author, multis nominibus, in volumine de artibus popularibus, philologia & mathematicis scientijs ad cap.xvj. in se transtulit: vbi habet:

Interim post tantorum virorum experimenta, & demonstrationes, eamque copiam instrumentorum, quam hodie habeamus; nihilominus super esse videatur in hac arte, quæ necdum perfectionem suam fuerant consecuta.

Talis est quæstio dequadratura circuli, quæ tot iã olim præclara exercuit ingenia. Vti Pythagoræ, Platonis, Euclidis, Antifontis, Bryssonis, Hippar-

chi, Archimedis, Ptolomæi, Nicomedis, Apolloni pergæi, Philonis gaditani, Spori, Pappi Alexandrini, Boethi, Hermanni contratti, aliorumque virorum; nec minus superiore seculo, ac nostro agitata est à Nicolao Cusano, Io. Regiomontano, Orontio Delphinate, Francisco Vieta, Iosépho Scaligero, Ludolfo à Ceullen, Hadriano Romano, Alphonso Melitensi Cano, VVillebrordo Snellio, Henrico Briggio Anglo, Christiano Seuerino, Io. Pellio, Gregorio à Sancto Vincentio, & alijs summi ingenij viris. Num quæstionis subtilitatem, aut ingenij humani imbecillitatem, in causa dicemus esse, quod seculis tot fuerit desudatum in soluendo nodo, qui adhuc sit inuolutus? Non spiralis magni Archimedis ratio, non illa quadratrix Pappi, suffecere. Prætulere hi lucem non exiguam, nec leue fuit quod posteriores addiderunt, sed sic quoque, ea quæstio parte sui mansit tenebris obsepta. Nimirum à carceribus est procursum, necdum tamen ad metam est peruentum.

Atque idem dixero de problemate Deliaco, siuè duplicatione cubi, quæ fieri nequit, nisi immittendo duas rectas lineas inter datas, vt continuè sint proportionales, quo in problemate laboratũ olim à Platone, Archita Tarentino, Menechmo, Eratosthene, Philone Bizantio, Apollonio Pergęo, Herone, Nicomede, Diocle, Sporo, è Iunioribus a Ioanne VVernero (vt de Io. Moltherohalso taceam)

ceam) à Christoforo Gruembergero. Illo (vt ait Claudius Riccardus in Commentario in Euclidem Hypsidem, & alios) cuius sunt omnia geometrica, quæ de Templo Salomonico legere est apud Ioãnem Baptistam Villalpandum. hucusque Vossius. At post illius decessum ratio postulat nostri instituti minimè in silentium tradere, que successerat, scilicet ex Gallia satis ingeniorum felix. Prodierat Renatus des Cartes, qui repererat ante se eam artem speciosæ scilicet analysis, à primo authore Viæta excitatam, cum ille in eandem valdè propensus esset, in culturam susceperat, & nonnihil immutatam; immò verius aliam propriam conceperat nouam atque studiosis commendauit, ex ijs haud suo absimiles ingenio asseclas obtinuit, qui post illius decessum (non enim vltra quatuor & quinquaginta annos, quæ dicuntur lanifices eius stamen protraxerunt) relictum agrum sibi agnouerant fæcundiorem non permiserant quiescere infatigatum. Profitebatur nobilis ille des Cartes ob assecutam cum acumine mentis, peritiam, de omni oblato problemate posse decernere, & determinare an fuisset soluendum, siue minus, quo circa requisitus opportunè quid de eo quadraturæ sibi videretur, respondit.

,, Illud esse problema istis positionibus circum-
,, uallatum quod oleum, & operam perderet
,, quicumque illius solutioni studeret.

Hoc

Hoc totum habemus traditum à Daniele Lipſtorpio in volumine ad ſpecimina philoſophiæ Carteſianæ mihi fol. 87. quare opinari licet, quod experimentum ſumpſiſſet, quid ſibi iuuarent artis ſuæ analyſeos vires, & agnouiſſet eas minus efficaces ad intentum, quod illud idem antea contigerat Vietæ, qui ad omne problema laudauerat in Iſagogis ſuis methodum traditam, fortaſſe in mentem retinuerat à methodo ea non comprehendi problema de circulo inquadratum, quoniam in octauo Variorum, ad caput xv. vt probaret quid per Geometriam liceret aſſequi (cognouerat namque regiam, quam dixerant alij viam ab Archimede propoſitam, non collimâre ad punctum) dixerat ſe agere de dimenſione circuli Geometrica: benè proxima veræ, ſcilicet minimè accurata. Ideo locus huic inſigni problemati occupatus non adeſt, Nonnulli aſſeuerarunt cum Campano, qui oppoſuit quadraturæ illum de angulo contactus ſcrupulum, nimirum angulus mixtus à portione circulo maiore eſſe recto maiorem: reliquus verò de circulo, minor recto, & tranſitus fieri per continuum; attamen angulus ſemicirculi non eſſe rectum, vbi argumentum Bryſſonis omne caderet; verum noſtra methodus non afficitur per angulum contactus, quia de eo tamquam ſi non eſſet nihil attigimus, vt infra cõſtabit: præterea ea quæſtio hodie à viris peritis exagitata, vt cognoſcerét, quid

quid res ſua natura exquirat, demonſtrarunt eſſe terminata, & multis rationibus concludunt non differre rectus à lineis rectis conſtitutus angulus ab eo ſemicirculi, non enim appellatio fieri debet aliundè, quã ad mentis tribunal; etenim Ius nullũ manet, ad illud ſenſus quoniam à proprio obiecto, matheſis ſubtracta materia, non poteſt ſe immiſceri sẽſus, quomodocũq; porrò ſe habeat res, noſtra methodus non afficitur, quoniam verò neſcio quid animoſitatis referat vt vergat ad temeritatẽ, qui contra tot heroes videamur audere, primum eos admonitos volumus, qui noſtra inſpecturi ſunt, quod per omnia munimur euclideis elementis, à quorum robore, non erimus diſceſſuri, neque præterea ſumus adeò hebetes, quod ignoremus poſſe ſolutio hæc præclara alicui conſpicuo loco haberi emancipata, & per accidens fieri eum à nobis occupari eo tempore, in quo Geometrica facultas inclinet dilucidari antiquum hoc præſtigium, quod nuncupari debuit; propterea quod illud tam arduum tot ſeculis apparuerat, facillima res erat, atque præ oculis, vt mirari oporteat ſe illuſos fuiſſe lynceos & peritos, vndè cenſendum erit certo conſilio geſtum, quod voluerit Geniuſ calamo inſufflari noſtro, vt liceret nobis illud vertere celebris Vatis.

Carmina non ſcripſi, at modulans alterna notaui, fortaſſe quia nonnihil Iuris ad rem perueniſſet,

per

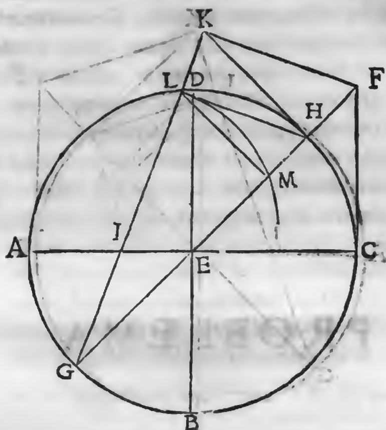
per consimilis vetustatis, duo alia soluta problemata ex elementis proprijs Geometriæ scilicet de duabus immissis lineis inter extremas rectas, vt fieret vna analogia, ac de sectione anguli tripartita. Ne igitur incomitatum problema iteretur quadraturę, iunximus aliud pro heptagono vtrumque. Construetur igitur & vt noua res demonstraturi, antiquum illud repetemus (paræmia, seu) adagium cogitationes secundæ meliores.

PROBLEMA.

Spatium circuli Geometria in quadratum commutat.

DAtur circulus, vt vertatur eius spatium in quadratum, concipiatur cirumscriptū quadratū, cuius media latera tāgent in ABCD extrema diametrorū AC, BD, ab angulo CFD, (concipe ductá FD) æquali suo opposito, alia diameter GH porrecta habetur in F, augmētum illud æquale fiet ex altera parte, si centro ex E distantia EF excederet HG. peræqualem excessum HF, nam GFH per 3 secundi est GHF, plus HF quadrato, ad hoc igitur quod minuatur illud augmentum, erigatur ex H contingens non terminata, & à puncto F

incli-



inclinetur FK æqualis ſemidiametro, FC datur K punctum à quo in G, extremum diametri HG, ſecabitur in L. à circulo: Dico partẽ ſemicirculo GL eſſe latus quadrati æquale circulo dato. Iungatur HL, quoniam exceſſus quadrati à diametro GH ſupra circulum, debet contrahi analogicè intra eum, vt illius partes potentiales, vt GL, HL, æquent penitus quadratũ diametri, ita quod pars vna, GLq, ſit pro ſpatio circuli, & reliqua LHq pro collectis exceſſibus, qui ſunt triangula quatuor mixta æqualia, atque ſimilia, quod vt fiat, oportet ſecare GH,



vt in M, vt fiat linea GM, ad MH, in ea ratione quadrati GL, ad LHq, vsque ad hoc vt resolutio, in ea sunt duo ordines, GM linea prima, GH secunda GLq, tertia magnitudo, GHq quarta, MH linea quinta, HLq, sexta, si per 24. quinti argumẽtũ fiat à cõpositione, erit per 31. sexti, vt prima cũ quinta GM†MH, ad secundam GH, vt tertia cum sexta GLq†HLq, ad quartam GHq, vtrobique æqualitas, & ordines sunt HG, GL, GM vnus, GH, HL, HM, alius, quare secatur GH quidem in M, vt quadratum GL, ad HLq, Hoc autem ritè per

geo-

geometriam perceptũ fiet problema facillimũ, ſcilicet duarum GF, GH; & tertia per 11. ſexti inueniatur GM, & à puncto M erecta ad normam ML. erit L punctum, ad quod æqualitas conſiſtit, & ad hoc tam obuium opus reuocatur præſtigiũ ignotum noſtris maioribus. Sed pergamus ad reliquum huius harmoniæ geometricæ. nam triangulum GKF rectangulum in K per conuerſam 8. ſexti, fuerant enim GF in FH rectangulum, & quadra- FK æqualia, quia in analogia fuerant tres ille GF. FK. HF. ergo punctum K in circulo à ſemidiametro totius GF deſcripto, & ſimilia, deindè triangula quatuor maiora GKF. GKH. GHL. GLM. & lineæ FK. KH. HL. LM. tria triangula minuuntur per ſimilia incontinua analogia triangula. Si dixero igitur, vt GF. ad FK. ita GK. ad KH. & pergendo vt GK. ad KH. ita GH. ad HL. & quoniam poſita fuerat, FK. æqualis dimidij GH. hoc eſt ſemidiametro, erit propter ſimilitudinem triangulorũ KH. ſemiſſis GL. pariter & latus tertium HF. in triangulo FKH. ſemiſſis fiet tertio reducti trianguli latere, HL. quod etiam per 2. ſexti GF. ad GH. vt GK. ad GL. ita FK. ad HL. triangulum igitur GFK reuocatur intra circulum per HGL. triangulum, nempè per analogiam trium FH. KL. HM. & conſequenter latera, KHL. ſunt dimidia latera trianguli LGM. hoc eſt HL. ſub dupla GM, & LK. ſubdupla ML. iam fuerat GL. dupla KH. omnia

cosentiunt in hac geometrica harmonia, & qua: drata GL. LH. in circulo partes naturales de quadrato circumscripto distinctæ sunt, circulus pro quadrato GL, & excessus reliquus in collecto HL. quadrato, & extra illud L. punctũ aliud, analogia nõ potest subsistere, quare à circumscripto quadrato si per E. centrũ ad semidiametrũ EF. scinduntur HF. & eius æqualis ex altera parte, dupla itaq; HF. est ad sensũ æqualis HL. pro quatuor ab HF. quadratis per 4. secundi excessibus, & quod fuerat potestas in GH. extẽsa cũ excessibus, qui detrahuntur,

reuo.

reuocata diameter GH. vt in poteſtate intra, & eius partes GL. & HL. illud ſpatium reſtituunt, quæ poſſunt aſſequi per factam conſtructionem GF. ad FK ita GH. ad HL. & modus iſte fuerat à nobis in editione prima obſeruatus; Nunc verò pregreſsi ſumus compendiosè, vt duarum GF. GH. tertia ſequatur GM.

Sed adhuc non aperuimus per arcani huius veram clauem, quæ erat circumſcriptum quadratū, & facta conſtructione, vt in ſchemate ponere diametrum GH. differentiam extremarum, & ſunt extremæ GF. FH. & clauis vlterius, ad alias extremas GK. KL. tertiò differentia alia extremarū GM extremæ fuerint GH. MH. quare per hoc idem medium nempè idoneum, ex dato latete, & media ad tria in ſerie regredimur. Sit ergo GL. differentia extremarum eius extremæ per vulgatum lemma, ſeu primam propoſitionem 3. Zeteticorum Vietę inuenio punctum K. à quo in erectam à puncto L. indeterminatam pono ſemiſſem GL. vt KH. habetur determinatum H. punctum, & ex G. in H. diametrum: ergo redit circulus à diametro GH. æqualis ſpatio quadrati GL. in hoc omnia redeunt conſimilia, quod non eſt opus iterum repetere. Si verò placeat varietas abſque diſpendio, ſumatur GL. pro diametro, cui circulus eat, in quo aptabis per primam quarti duplam LK. fiet LM. & ex G. in M. procurrat linea in idem punctum H. erectæ

ctæ ex L. normalis fiet LH. quadratum differentię inter HG. quadratum diametri, & circulum.

SCHOLIVM.

QVocirca diameter GH aucta in GF efficit basim trianguli rectãguli GKF, & amoto augmento HF manet aliud GKH triangulum, in qua series continuantur GHL triangulum totum, & partes in eadem analogia, ita vt LM MH quadrata, sunt differentia quadrati à diametro HG supra circulum, & duo GM, ML quadrata sunt spatium circuli omnia reuocata in eadem analogia triangulorum similia, quare addito triangulo LMH ipsi GLq, seu GML triangulo triangulum GLH, per diametrum, vt quadratum æquatur rursus quadratis GL, LH simul vt etiam ex 2. duodecimi circulus AB, &c. duobus circulis à diametris GL, LH, quare geometricè omnia procedunt, nec amplius erunt obscura.

PRO-

PROBLEMA II.

De constructione Polygoni imparium laterum in genere.

MAiores nostri inordinatione proly goni laternm imparium non vltra pentagonum præcesserant, quod autem ad latus quindecimi excessissent fuit per differentiam duorum laterum pentagoni in eodem circulo supra latus isopleuri, at pro heptagono singulari effectione, ignotum fuerat tot sæcula ad nostra vsque tempora, suppleuerant authores per opus haud legitimum, quo ad Io: Keplerus pertesus de onere inquirendi, & reperisset nil sibi iuuari in suis harmonicis insectatus illud schema, suaderi voluerat non posse assequi geometricè, & ideo neque inquiri amplius oportere, quia defectus in facultate inesset ‘ nos in quadam opportunitate non pro vno heptagono, at pro indeterminatis formulam quamdam generalem dedimus, etiam pro paribus lateribus potens, non tamen accipiendam in vsum, cum bisectio elegantior efficiat, nostra exemplaria non fuerant venalia animo quædam reformandi iam à decem annis, nec modo licuit ob vrgentia alia, quæ impediunt, at quia incidimus in quodam Volumen

Tu-

Tubingæ impressum sub titulo Synopsis mathematica, &c. apud Io: Alenandri Cellij, 1653. in quo reperimus repetita verba Kepleri, vt sequitur mihi fol. 171.

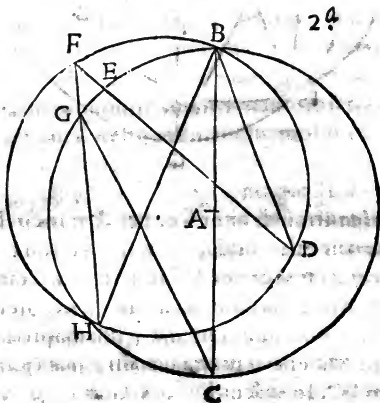
Notandum de Heptagono.

,, Heptagonus, etsi mechanica quadam ratione
,, circulo inscribi possit, geometirica tamen de-
,, scriptione, tàm extra circulum, quàm in cir-
,, culo caret, quum lateris quantitas, respectu
,, diametri, vel cuiuscumque alierius figuræ, etsi
,, necessaria sit ignoretur: nec vt vult Keplerus
,, in suis harmonicis è mente humana sciri possit:
,, Itaque nullum vnquam regulare septangulum
,, à quoquam constructum esse ait, sciente, & vo-
,, lente, & à proposito agente, nec construi posse,
,, ex proposito, sed benè fortuitò, & tamen igno-
,, rari necesse esse constructum sit, an non.

Hactenus in ea Synopsi, quocirca innouatum hoc Kepleri assertũ, à suis Coacademicis, vt aiunt, quia opusculum illud nostrum totũ nequeat rursus visitari, eam partem pro præsenti quæstione de heptagono non debemus relinquere, quum ad rem faciat maximè, ne contra veritatem geometricam gliscere sinamus erroneam doctrinam, etenim defectum fuerat in cultura, atque cultores, nõ tamen in facultate. Ponamus igitur generalem inuentam prius formulam, deinde veniemus ad aliã singu-

ſingularem,vt appareat, quam imperitè inſecutus fuerat heptagonus, & quanti fieri debeant,quę pro geometria propugnanda exhibentur. Ad rem itaque.

Detur circulus in diametro BE. de quo inquiratur pars quæcumq; laterum imparium. Accipiantur tot ſemipartes in periferia, quot latera debet habere polygonus, ſit exemplum in heptagono,



itaque accipiantur tres partes cum vnius ſemiſſe à puncto B. ea amplitudine circini, vt omnes ſimul citra diametrum contineantur, & ſint in noſtro caſu $\frac{7}{2}$ in arcu BH. prima BE. iungatur corda BH.

2a

F B E G A D H C

circa quam circulus alter ſcriptus, & puncto D, ſecetur ſemicirculus BDH. biſariam, à quo D.per E. datum prius, agatur corda DE.in proprio circulo, & ab inuento F.alia iungatur HF.ea ſecabit circulum datum nouo puncto in G. Dico portionem abſciſſam BG eſſe ſeptimã circuli partẽ circa diametrum BC. Iungãtur DB.& CG. & quoniã inſiſtentes ſuper æqualem, aut eundem circulum per 21. tertij, anguli ſunt pares, & pares anguli de inæqualibus, circulis portiones ſimiles abſcindun-tur per 10' definitionem tertij, propter BG.anguli ad H.& C.æquantur, ita propter FB.anguli H.& D.

æqua.

æquales,tres ergo anguli H,C,F,pares sũt,atq;arcus BG.BF.BE.in analogia, & inuertendo erit proportio continua BE. BF. BG. at BE. ea pars fiet assumpti arcus BH. quæ BF. sui semicirculi BH. atq; BG. semicirculi dati, $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{2}$ quæ BF. ad BH. atque BG. ad BC. & BE. ad BH. omnia consequentia duplata erit ratio BE. ad duplum BH. arcum. Ita 1. ad 7. Ita BF. ad suum circulum BFHD. & ita BG. ad suũ datum.

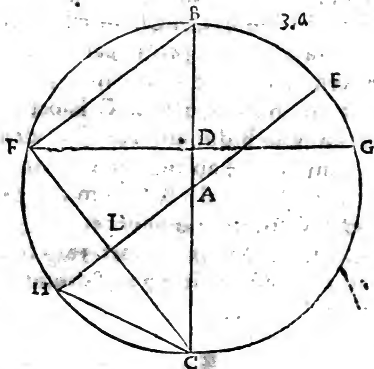
Quocirca per hanc inuentam analogiam septimam partem in duos circulos exhibemus, quod fuerat necesse, quia non minus, quam in tribus terminis haberi nequeat ex 9. definit. 5.

Authores quidem Keplero moderatiores nunquam negarunt ab ipsa Geometria eruendi heptagoni potestatem; at repeterant sapienter non esse adhuc inuẽtam eam artem, hanc tradidimus ante decennium, & modò repetimus, quia exemplaria pauca fuerunt distributa, & porrò succedentibus temporibus iniquis ex non paucis extra Italiam directis iacturam fecimus, at transeamus ad singulare illud problema.

PROBLEMA III.

Heptagonus in circulo à Geometria inſcribitur.

SIt circulus in diametro BC. hæc ſecta in D. ſecundum mediam, ac extremam rationem,& ad rectos angulos per idem punctum ducta FG. Dico ſectum circulum in quatuor, & tres omnes partes æquales, quarum vna HC. iungantur CF.



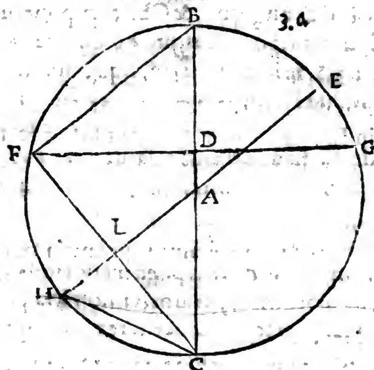
BF. & quoniam ex vi ſectionis tres fiunt in ſerie CB.CD.BD.& per 8.texti CB. BF.BD.ergo æquales CD. & FB.at ſi diuidatur bifariam CF.à linea ex cē-

tro

tro AH. ipſa CF. erit & arcus bifariam ſectus per 30. tertij, & ſimiliter in ratione eadem AH. in L. ſecatur, vt dupla ipſius in D. fuit; nam per 4. ſexti AL eſt ſemiſſis FB. hoc eſt CD. Ideo, & reliqua HL. ſemiſſis reliquæ BD. ſecta igitur ſemidiametro AH. in L. compleatur diameter HE. hæc ducta in HL. minorem partem ſemidiametri ſectæ ſecundum mediam, ac extremam rationem EH. in HL. poſſunt quadratum HC. Dico eſſe latus ipſum quæſiti heptagoni. Probemus primum per angulos, etenim per 8. ſexti anguli FBC. CFG. fiunt pares, vt etiã alij duo BFG. FCB. intelligatur diameter conſueta diuiſione 360. in partes ſcindere, ergo ad A. centrum quatuor recti fiunt, quorũ A. vna ſeptima pars in triangulo HAC. habet 51. $\frac{3}{7}$ & in periferia angulus B. duplum 102. $\frac{6}{7}$ totidem pro CFG. ſunt ſimul 205. $\frac{5}{7}$ ab angulo ACH. dempto FCH manet ACL. æqualis BFG. ſimul 154. $\frac{2}{7}$ nã ad baſem H. & C. Iſoſcelis quilibet eſt 64. $\frac{2}{7}$ à quo ſublato 25. $\frac{5}{7}$ pro LCH. manet 38. $\frac{4}{7}$ ACL. ad arcum relatus pro BF. efficitur 77. $\frac{1}{7}$ & totidem pro eius coæqualis BFG. fiunt ea ſumma bis 154. $\frac{2}{7}$ tota itaque peripheria diſtributa eſt in ſeptem partes quod anguli conſentiunt, ſi de quantitate eius lateris HC. inquiratur. Ponamus diametrum HE. eſſe quatuor vnitates, eius dimidium binariũ AH. & vtraque ſecetur in eadem ratione in L. vt iam factum habemus per v. propoſitionem libri xiij.

Eſi-





Euclidis, fecari in A. centro. Rurfus in eadem, & quatuor de tota HE. diametro fieri in ferie analogica LE. AE. AL. LH. earum partium quantitates ex ordine funt r.5 † 1 | 2 | r.5—1 | 3 —r.5 partiũ quare per 16. fexti idem productum habetur, ex duabus extremis, quam à duabus medij r.5 † 1.m 3—r.5 LE. in LH. fiunt r.20—2 totidẽ 2. in r.5—1 cui addatur quadratum LH. 14—r.180. effucetur fumma algebricè 12—r.80. quadratum HC. 12—r.80. latus verò inuentum poteftatiuè erat r. (12—r.80. quod neqnit aliter enunciari ob naturam generis difcreti; at quoniam tota HE. taxa-

uimus

uimus 4. vnitates si HC. quadrato, addatur CEq. rectus erit HCE. angulus, & CE. componetur ex LC. quod fuerat r.20—2. atque ex quadrato portionis LE. r.5 † 1. inserit r.20 † 6. quorum summa r.80 † 4. addita HCq. ———————— r.80 † 4

———————— 12—r.80

redit quadratū diametri eius relatus vni- 16. o
tates quatuor, tot fuere limitata à princi- 4
pio.

Cōclusio. Quocirca tā ignotum latus polygoni septē laterum fuerat nostris prædecessoribus, quod ordinatio figurarum imparium, vt nō vltra pentagonum nullus fuerat qui procederet ad heptagonum, & tamen L. punctum extremum pentagoni in circulo scribendi (iuxta formam Ptolemæi, qua vtuntur omnes commodior, quam Euclidis) pentagonum altera consimili analogia heptagonum affert in schemate punctum L. illud idem, in quod à circuli puncto quadrantis, linea nimirum potens hexagoni, & decagoni quadrata per 10. libri 13. Eucledis. Fit latus pentagoni, & secatur, vt supra diximus in L. semidiameter media, ac extrema ratione non itaque pentagonus clauserat progressū ad alios polygonos, ea imparibus lateribus; immò nobis ostendit ad hèptagonum iter tutissimum; si itaque in eodem schemate inter diametrum totam HE. & LE. acquisitam per v. propositionem libri xiij. inuenias per 8. sexti mediam in ratione erit

ducta

(ducta CE.) quadratum potens; ab eo diametri quadrato, deductum, vt reliquum CH. fiat quadratum lateris heptagoni. Erat HE. vnitates 4. in LE. r.5. † 1. ducta, simul sunt r.80. † 4. quanta erat summa LCq†LEq. & illi quadratũ 12—r.80 pro quadrato HL. in se summa redire videtur quadratum 16. idest radix diameter 4. Cur autem, quæ facillima fuerant ex natura rei nostri non viderant præcessores, defectus in inquisitione fuit per elementa, & quoniam tot encomijs, atque laudibus inter humanas, atque mysticas scripturas videmus, & meritò celebrari numerum septenarium, non poterat hoc honore fraudari Geometria, vt in perfectissima circuli figura non reperiret locum: inspeximus igitur fuisse elemento fœcundissimo connexum, vbi si antiquiores aduertissent cogitando reperijssent, quod idẽ dicimus de quadratura, pro excessu aucto ad circuli diametrum, abs natura ipsa oblatum: Vidimus clauem artificiosam ante fores paratam ad ingressum, non quidem commentitiam, vel lusoriam, at in superficiem non attendimus, & præ oculis habemus, procul ad impropria vertimus ideo in luce erramus meridiana aliquando.



